

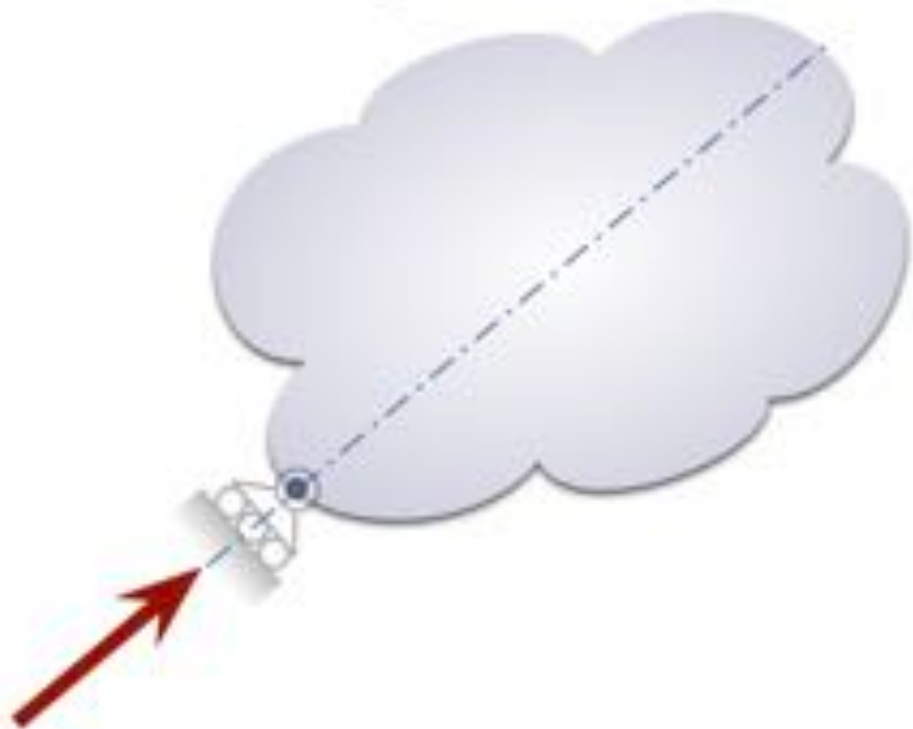
# Vincoli e reazioni vincolari

Fondamenti di Meccanica delle Strutture

G. Formica, martedì 8 novembre 2022

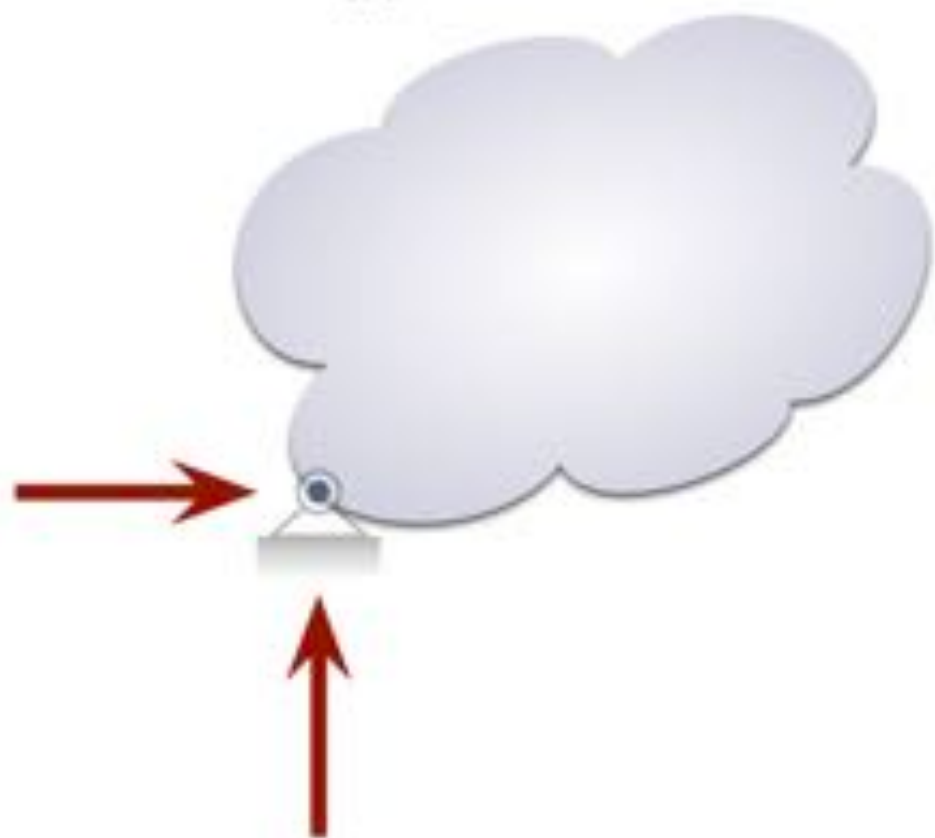
# Carrello

Vincolo semplice



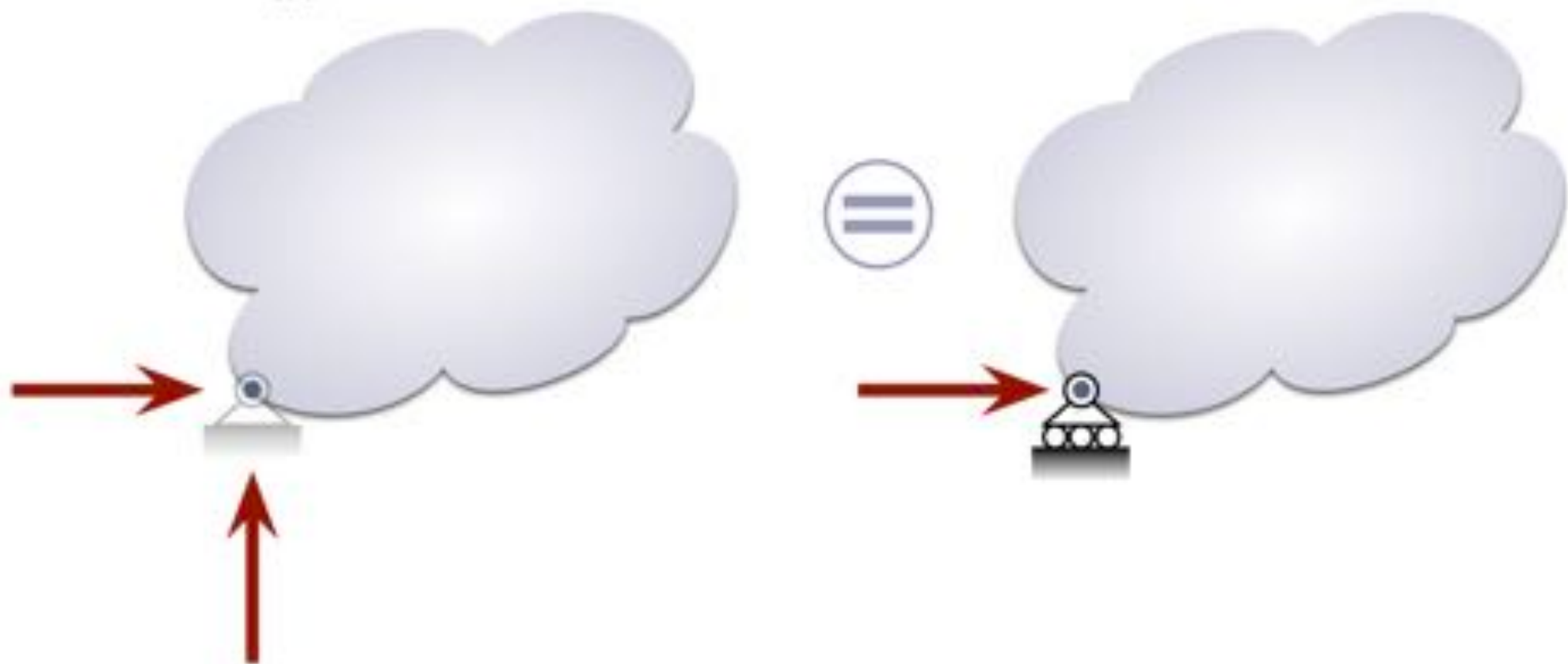
# Cerniera (esterna)

Vincolo doppio



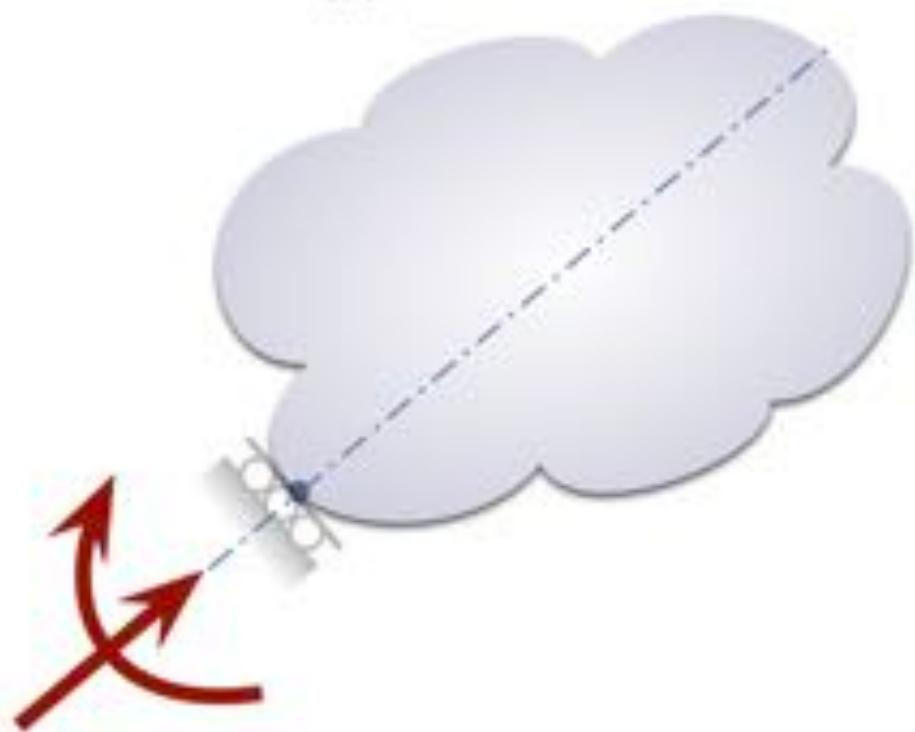
# Cerniera (esterna)

Vincolo doppio



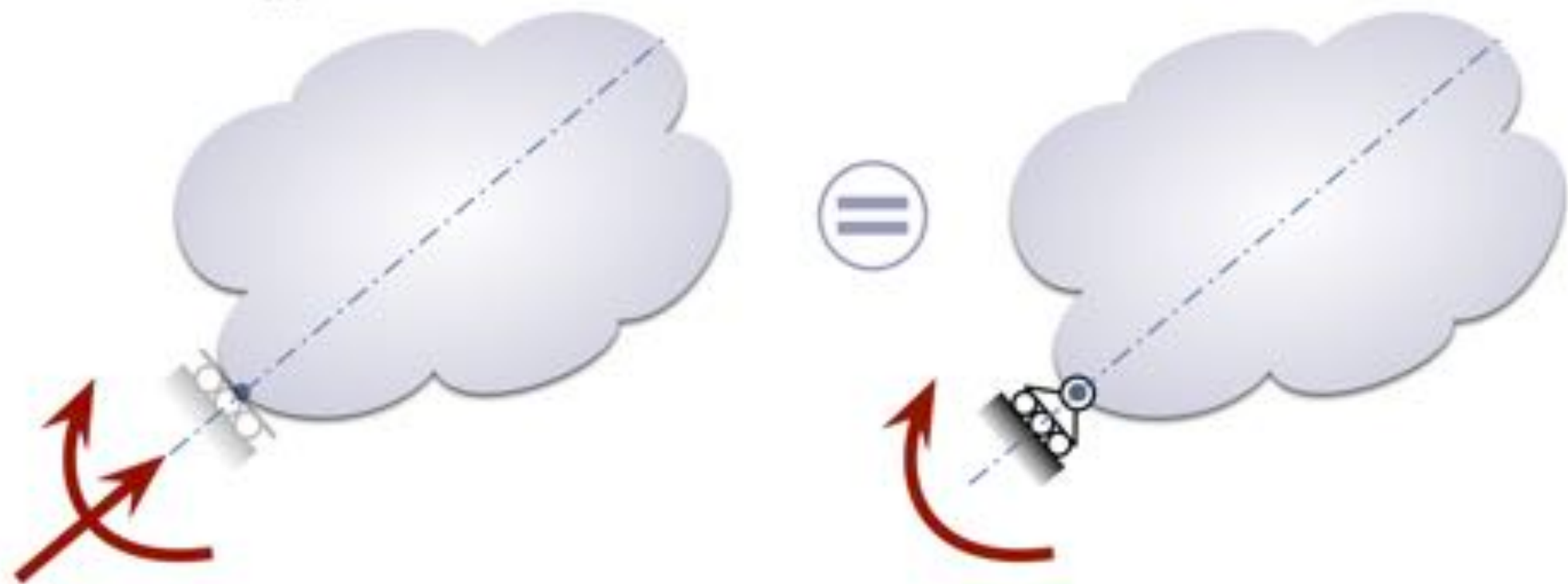
# Pattino (o glifo)

Vincolo doppio



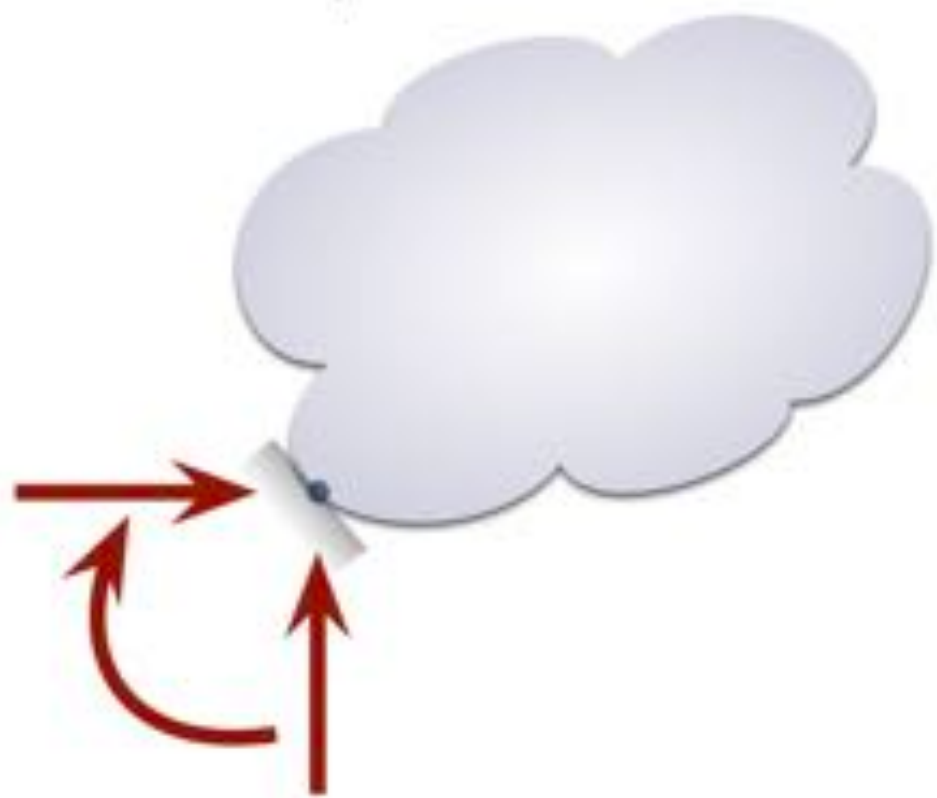
# Pattino (o glifo)

Vincolo doppio



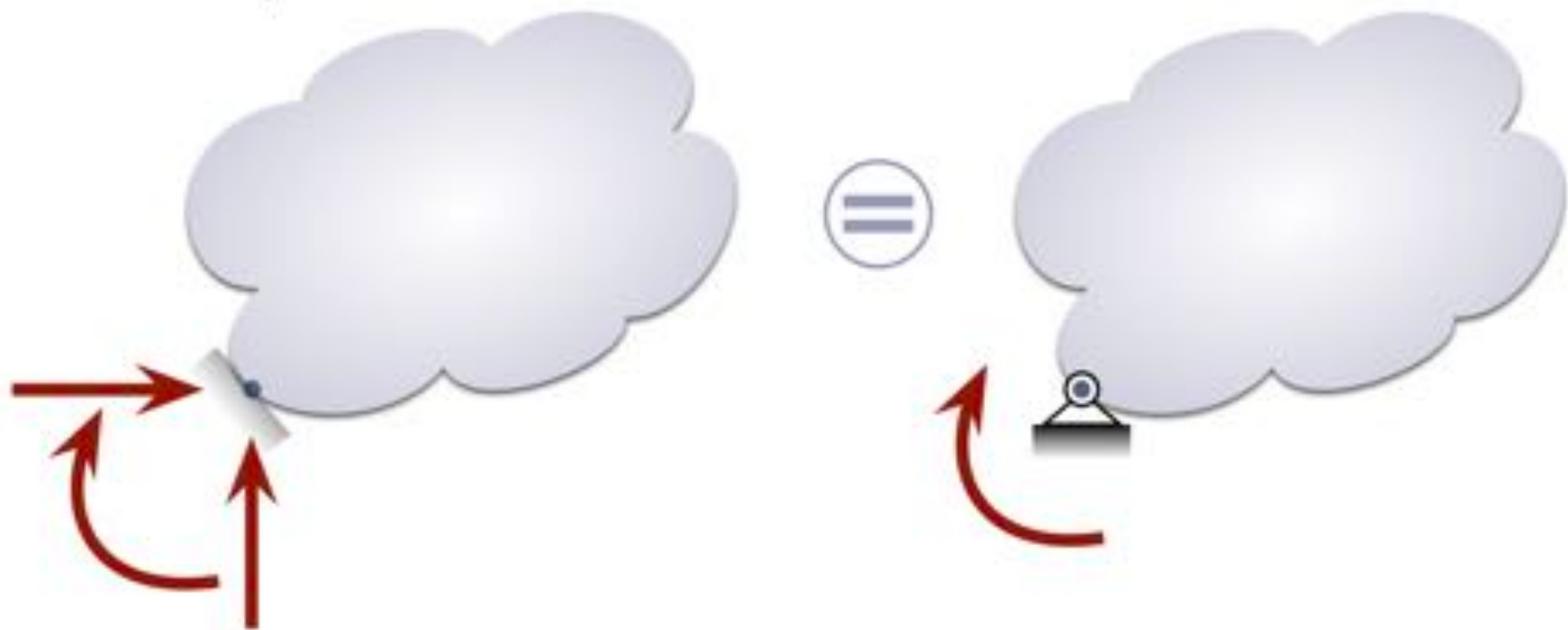
# Incastro

Vincolo triplo



# Incastro

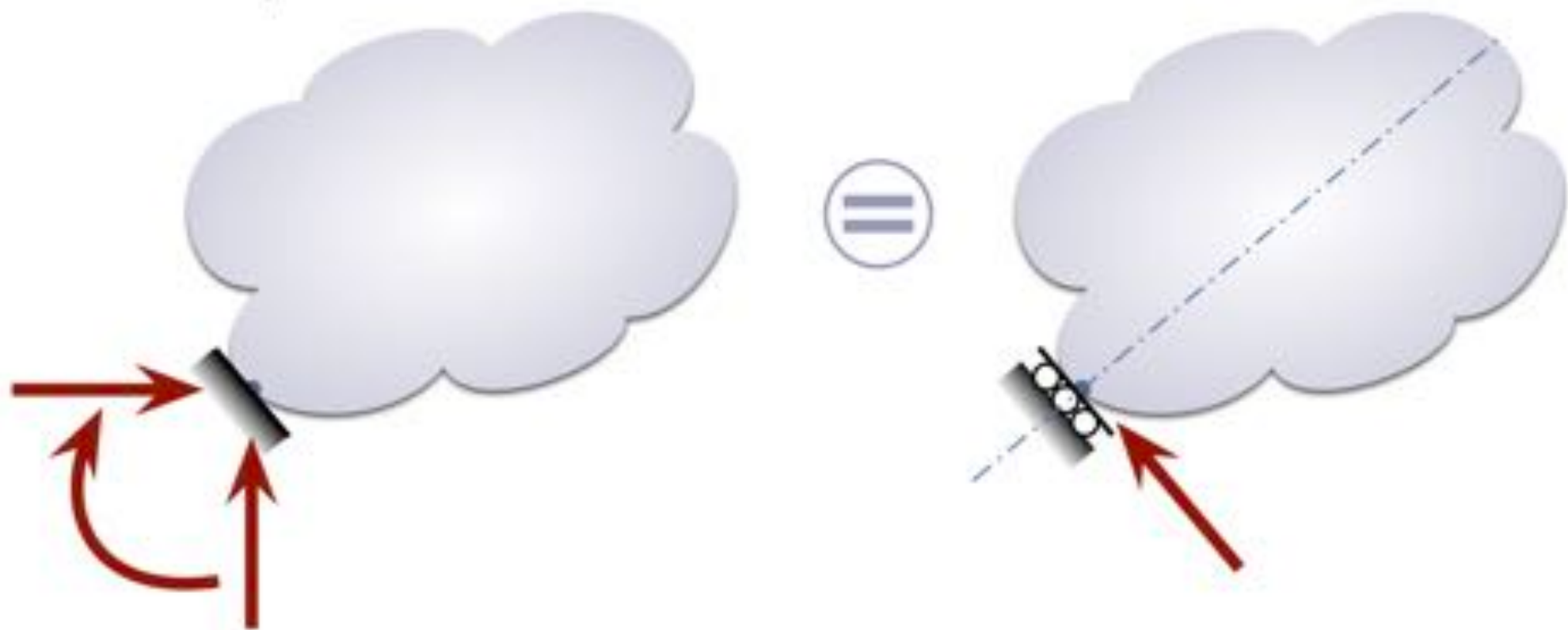
Vincolo triplo





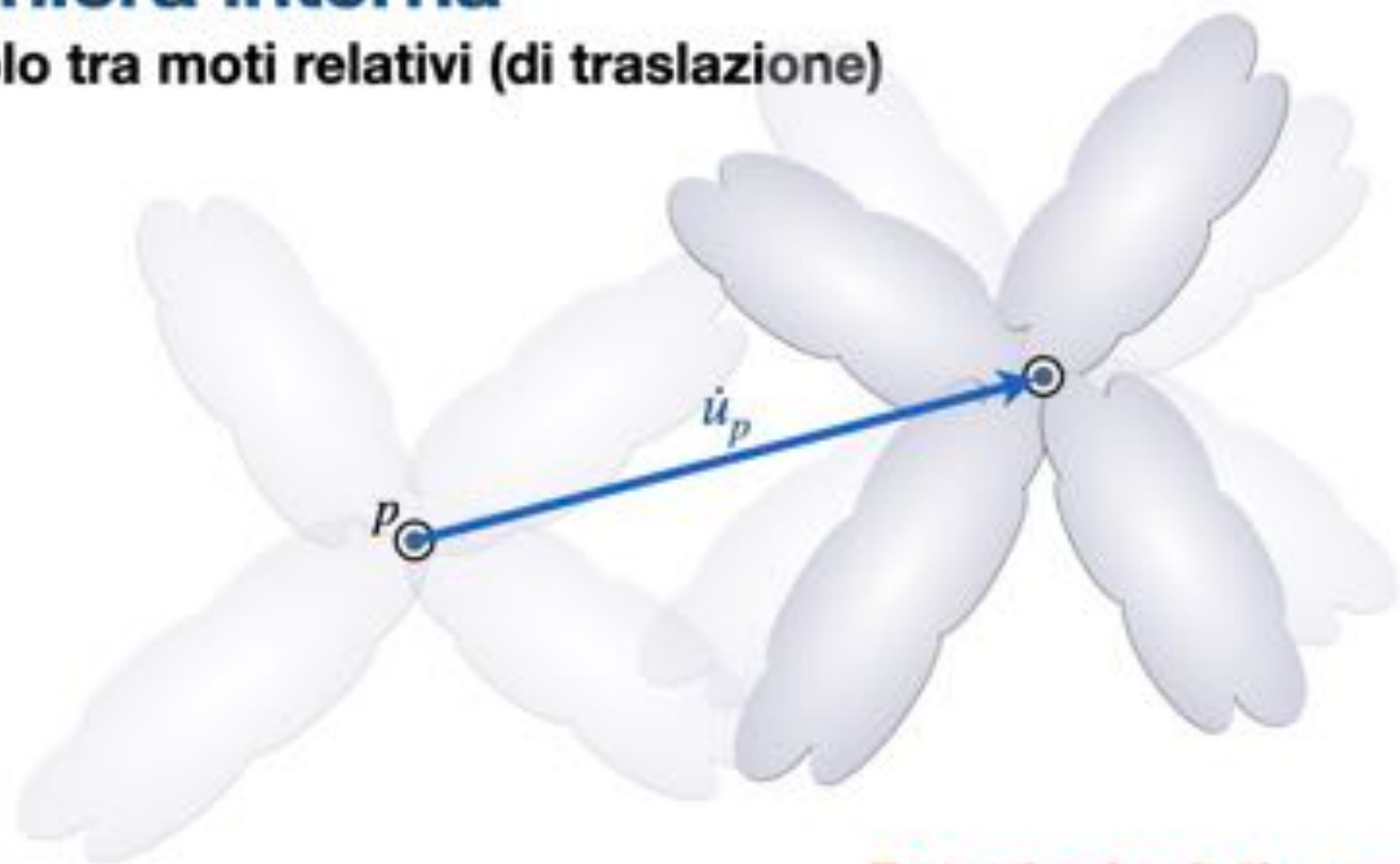
# Incastro

Vincolo triplo



# Cerniera interna

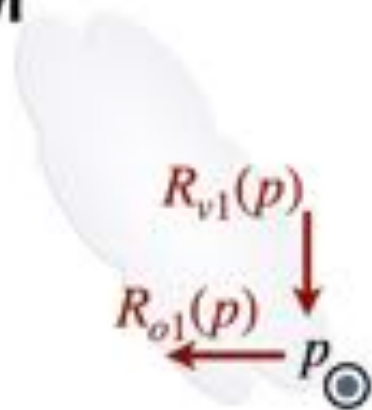
Vincolo tra moti relativi (di traslazione)



**Rotazioni relative ammesse!**

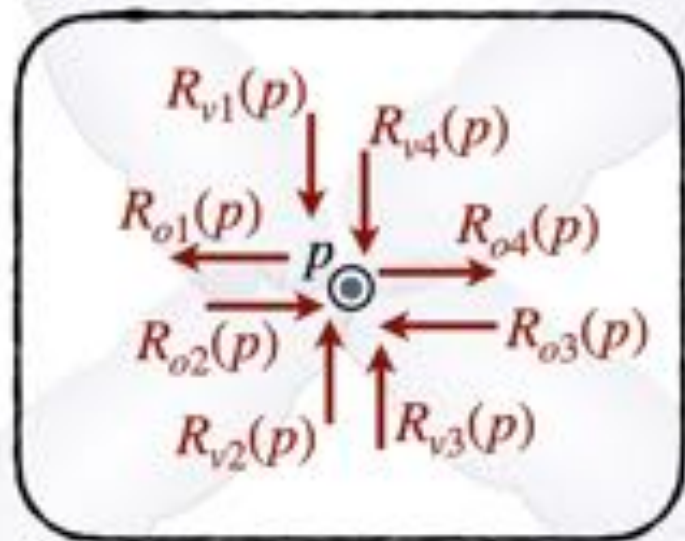
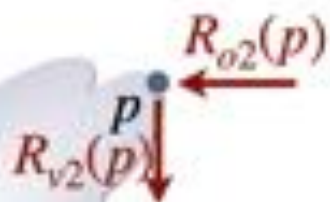
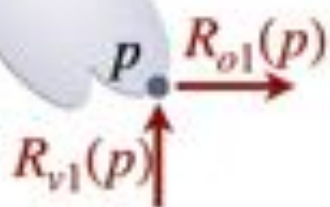
# Cerniera interna

Visione tra moti relativi



# Cerniera interna

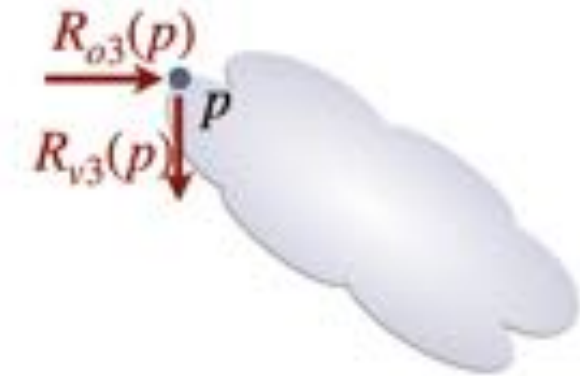
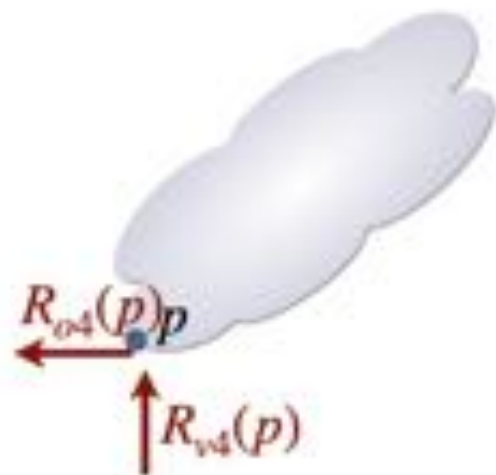
Vincolo tra moti relativi



equilibrio al nodo

$$\sum F_o = 0$$

$$\sum F_v = 0$$



# Cerniera interna

Vincolo tra moti relativi

caso 2 corpi connessi



# Cerniera interna

Vincolo tra moti relativi

caso 2 corpi connessi

Potenza per reazione  $R_o$



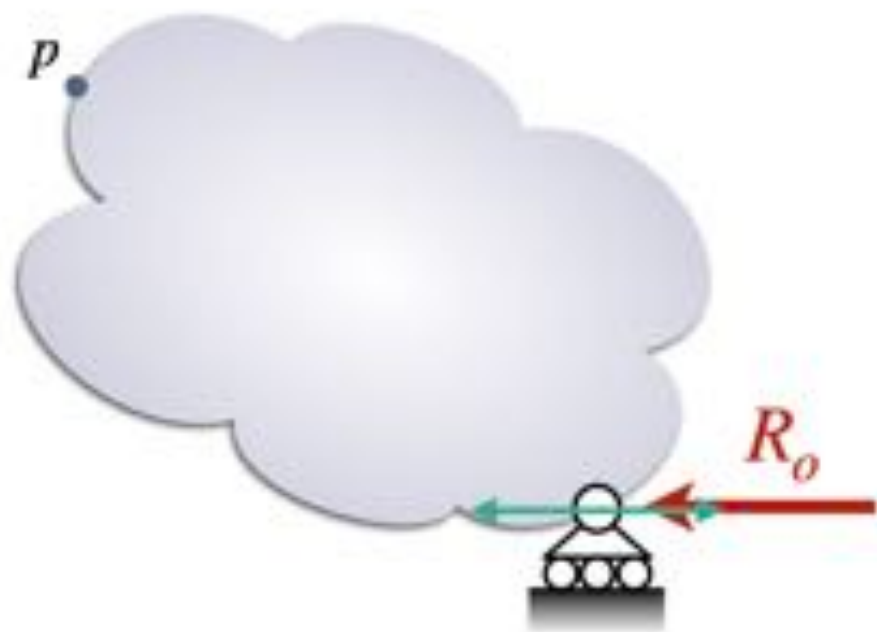
# Cerniera interna

Vincolo tra moti relativi



caso 2 corpi connessi

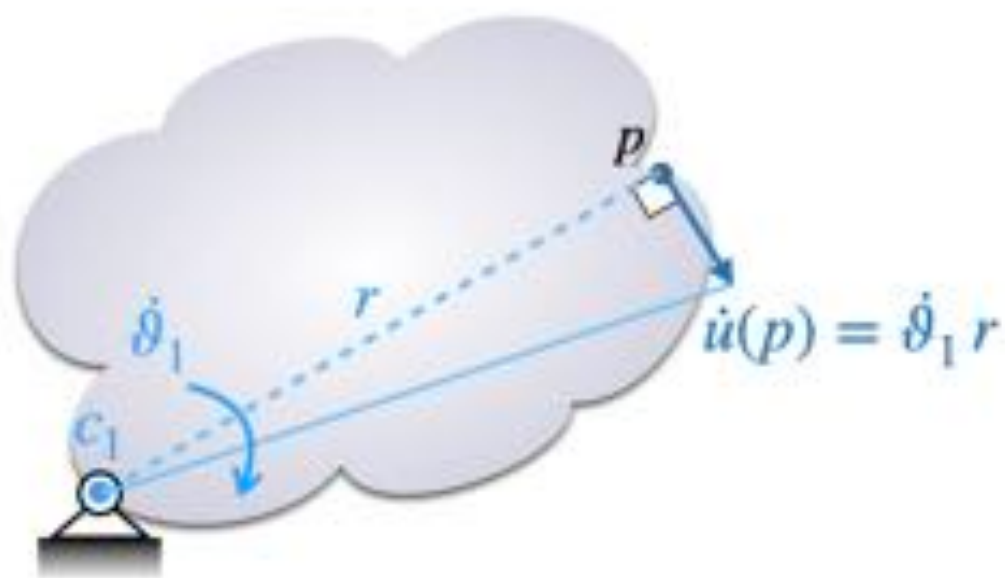
Potenza per reazione  $R_o$





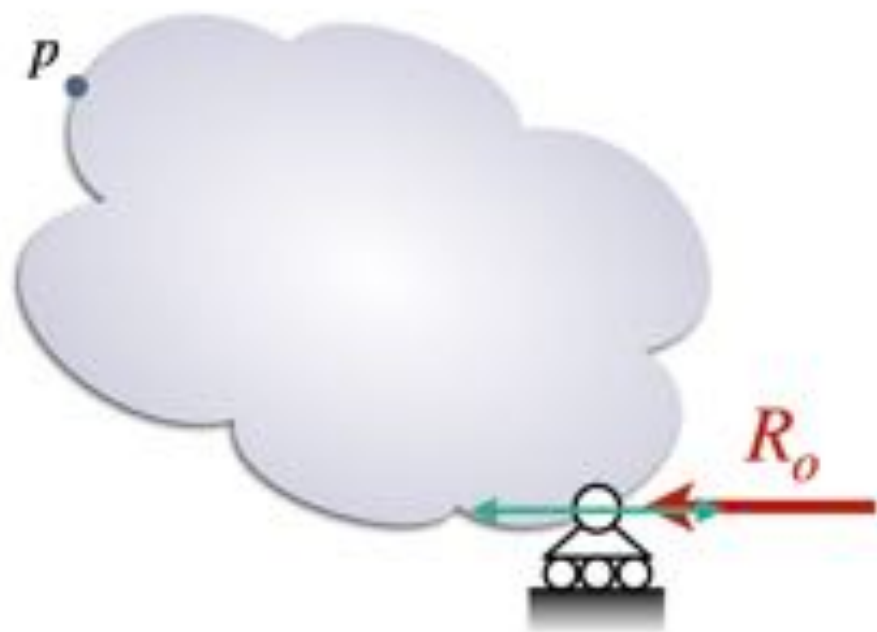
# Cerniera interna

Vincolo tra moti relativi



caso 2 corpi connessi

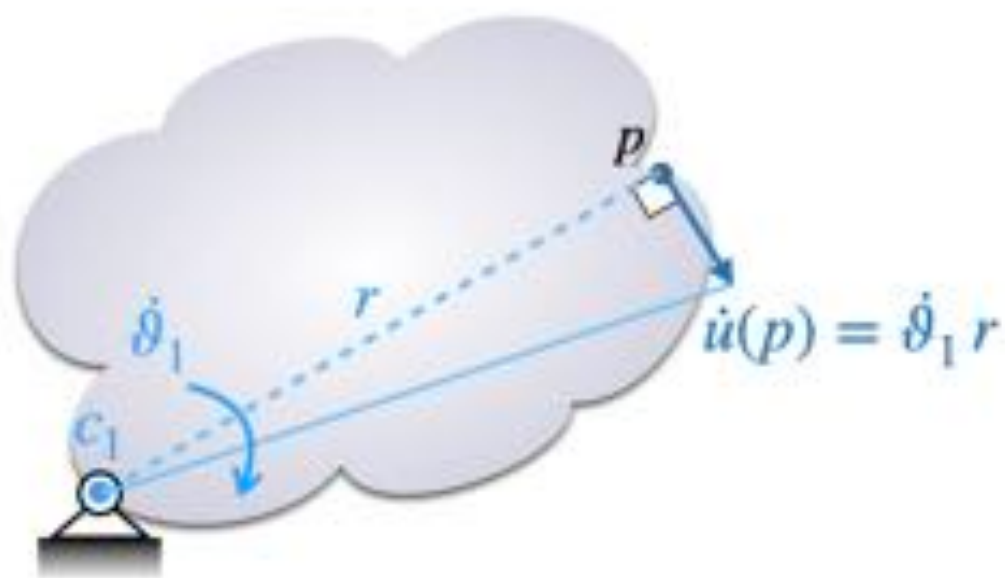
Potenza per reazione  $R_o$





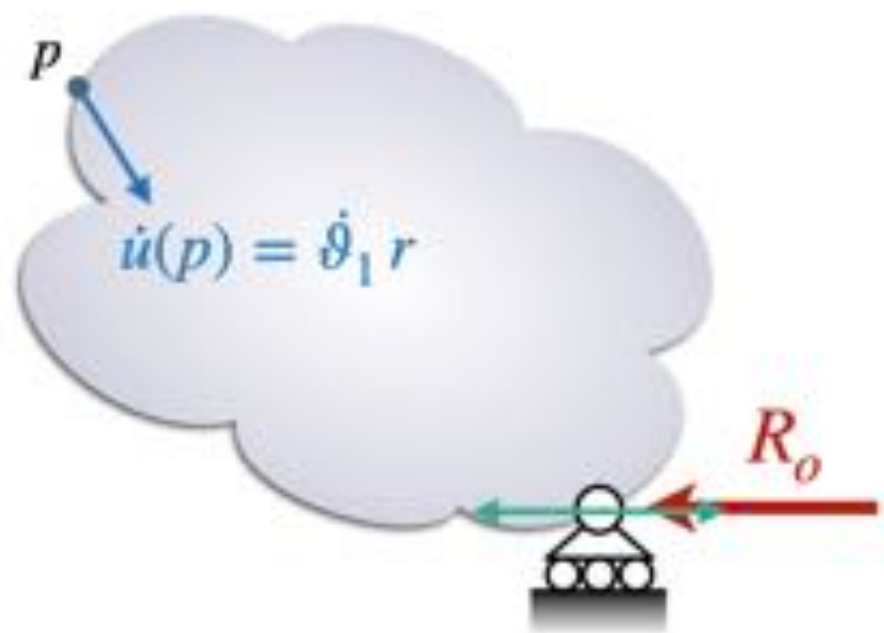
# Cerniera interna

Vincolo tra moti relativi



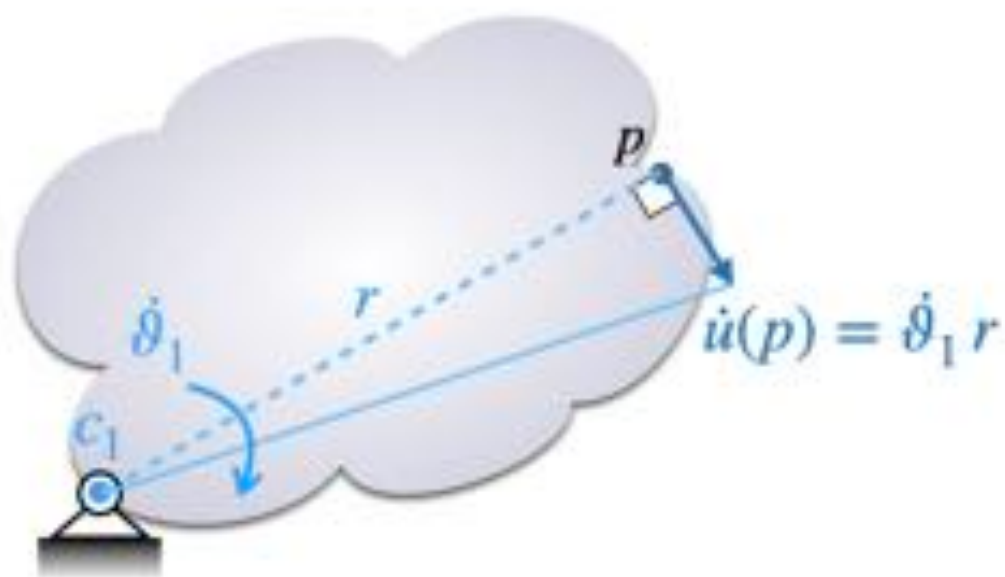
caso 2 corpi connessi

Potenza per reazione  $R_o$

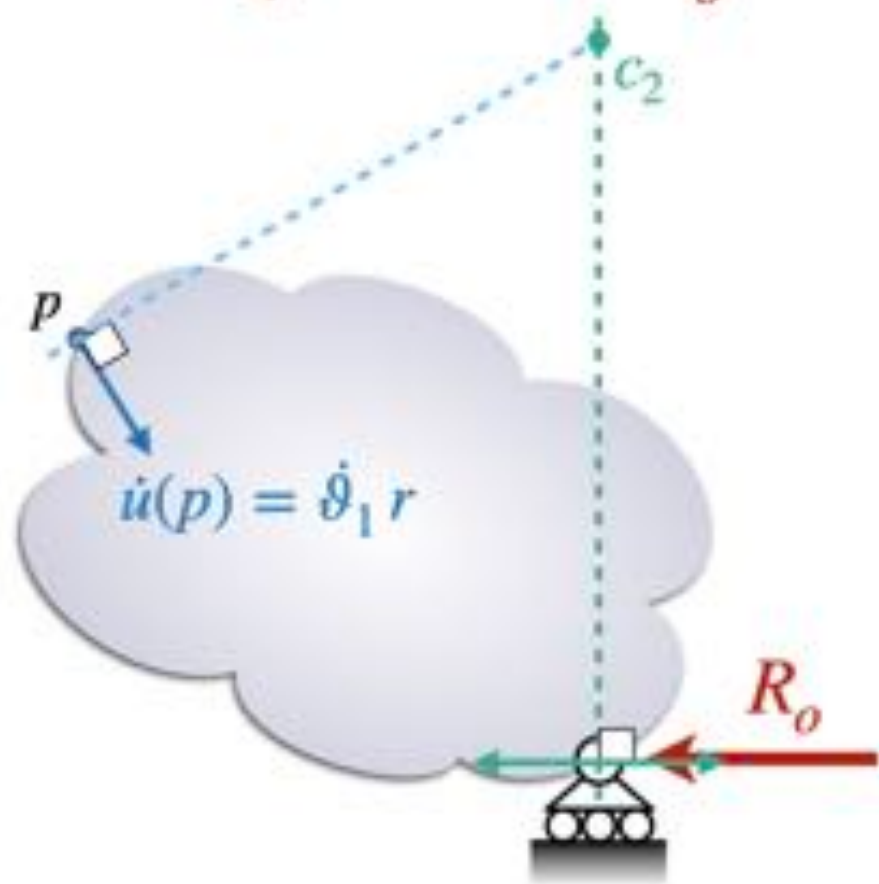


# Cerniera interna

Vincolo tra moti relativi

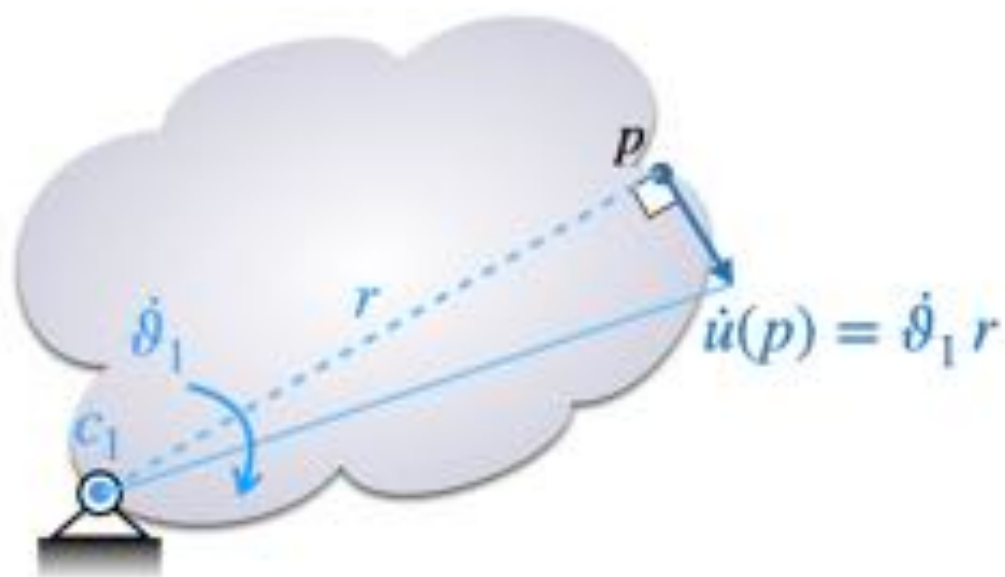


caso 2 corpi connessi  
Potenza per reazione  $R_o$



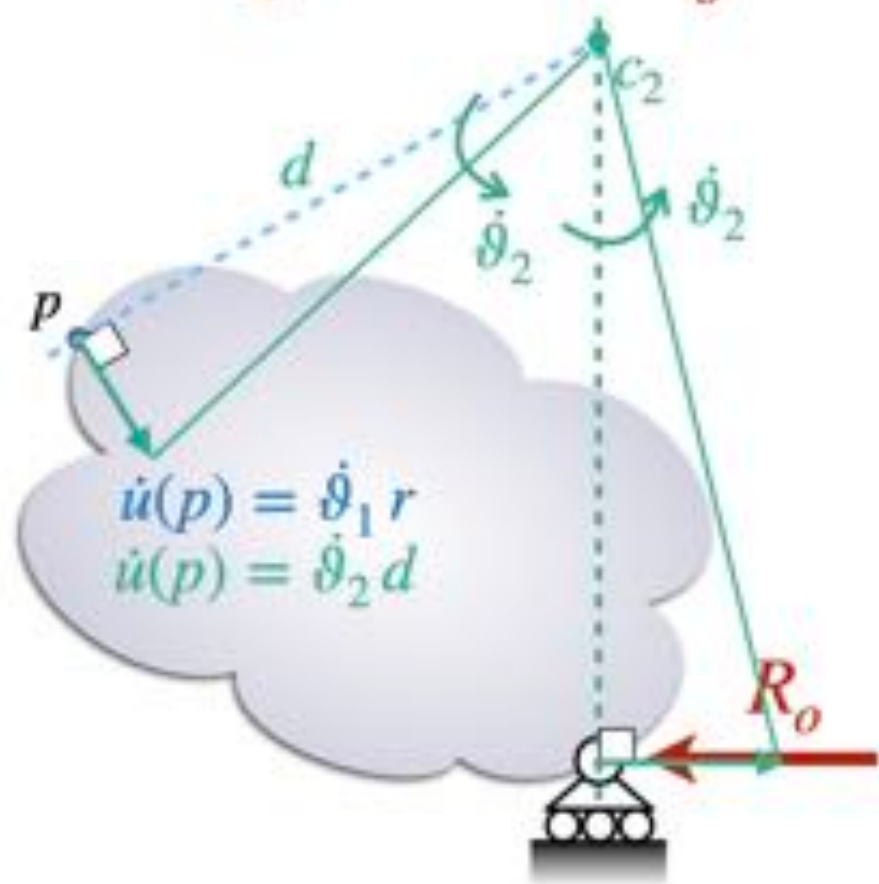
# Cerniera interna

Vincolo tra moti relativi



caso 2 corpi connessi

Potenza per reazione  $R_o$

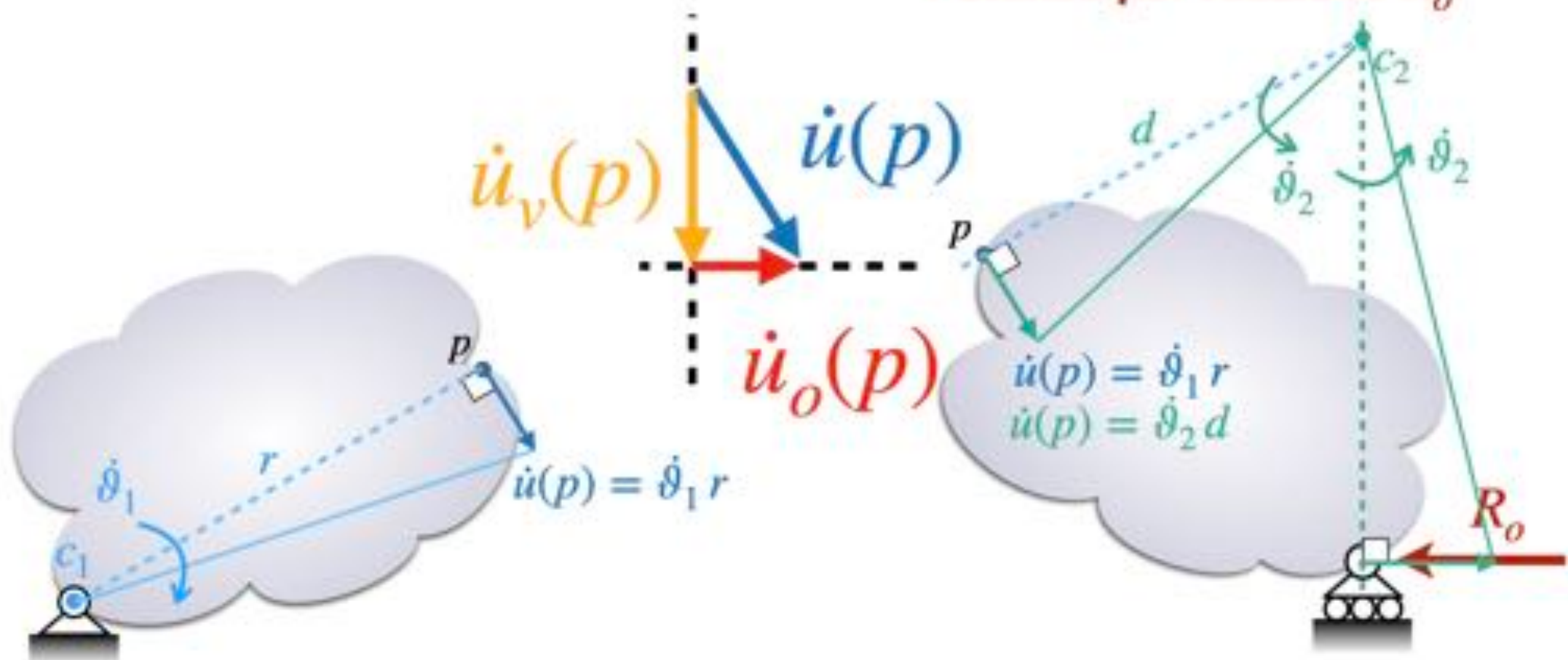


# Cerniera interna

Vincolo tra moti relativi

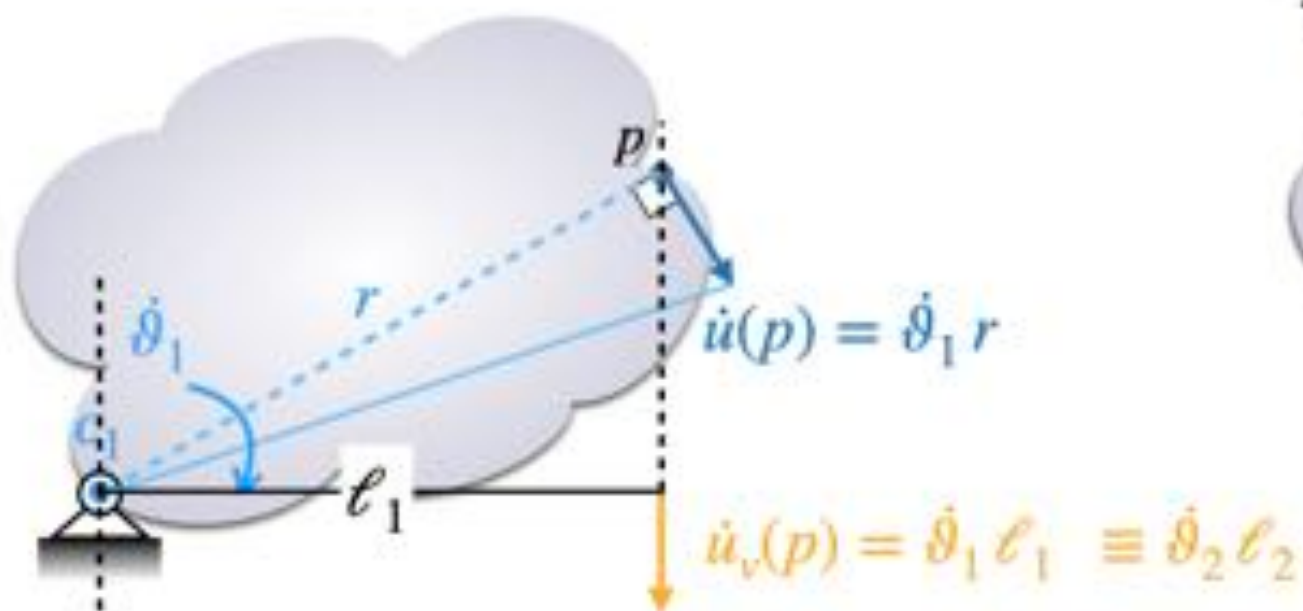
caso 2 corpi connessi

Potenza per reazione  $R_o$



# Cerniera interna

Vincolo tra moti relativi



caso 2 corpi connessi  
Potenza per reazione  $R_o$

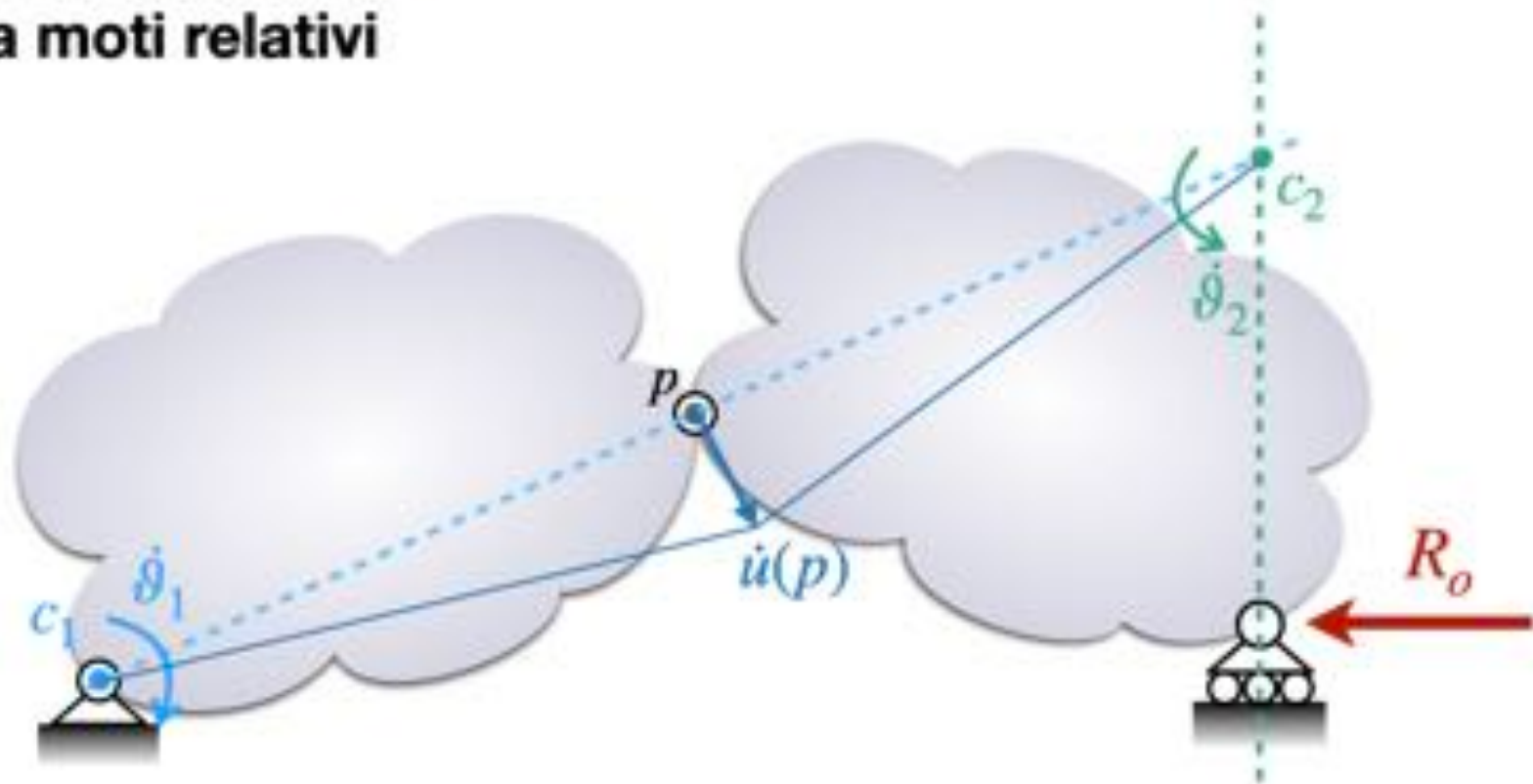




# Cerniera interna

Vincolo tra moti relativi

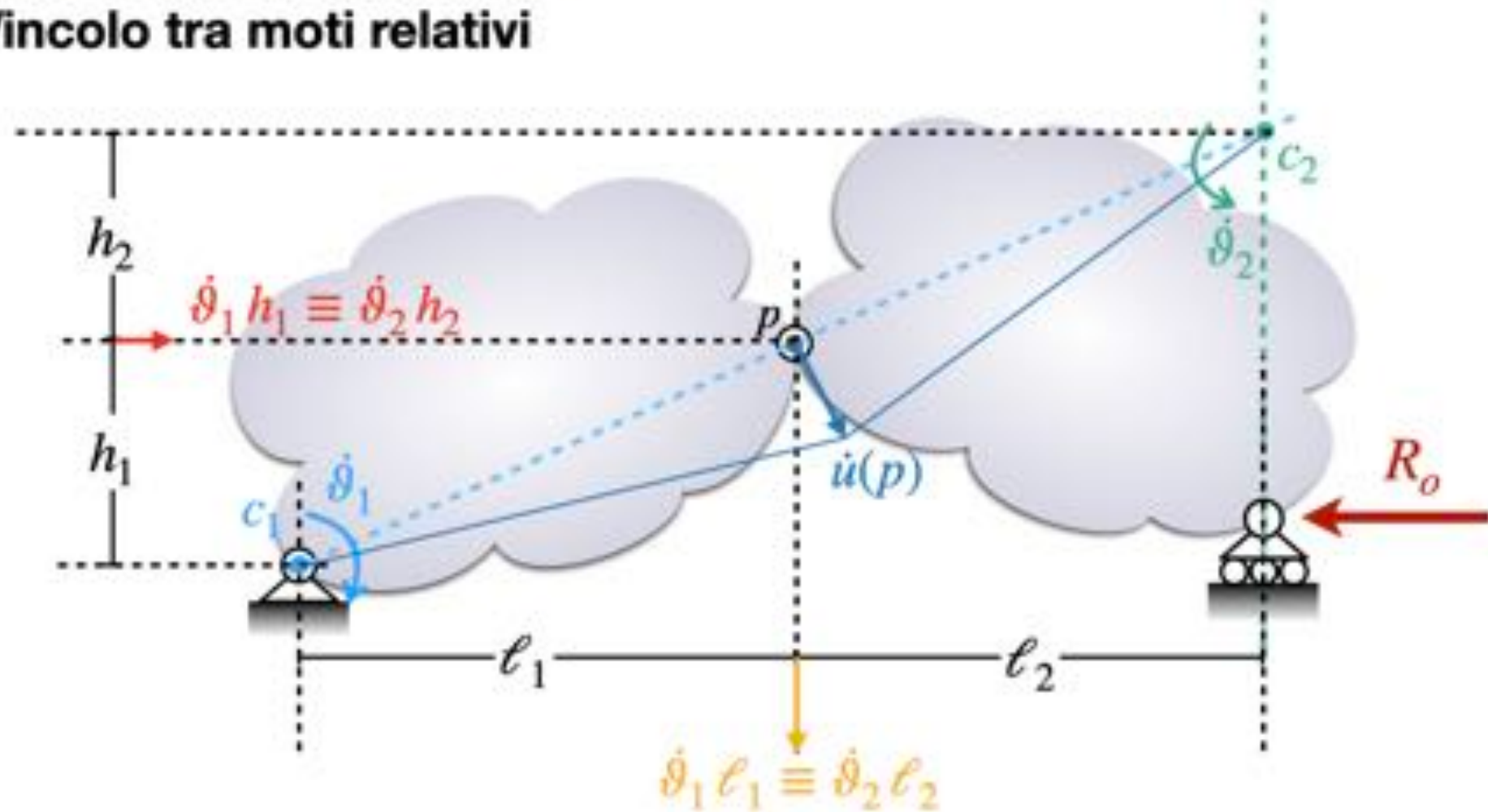
caso 2 corpi connessi



# Cerniera interna

Vincolo tra moti relativi

caso 2 corpi connessi



# Carrello





# Carrello



## Cerniera (esterna)



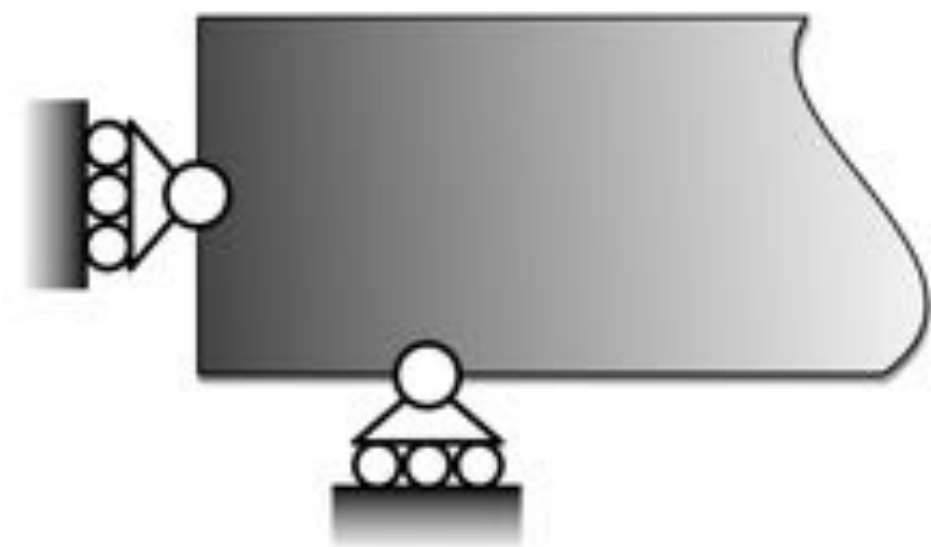
## Cerniera (esterna)





## Cerniera (esterna)

Vincolo doppio (unione di 2 carrelli)



## Cerniera (esterna)



vs.

cerniera interna



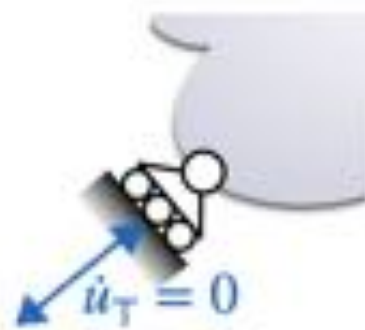
# Classificazione delle strutture

in base ai vincoli

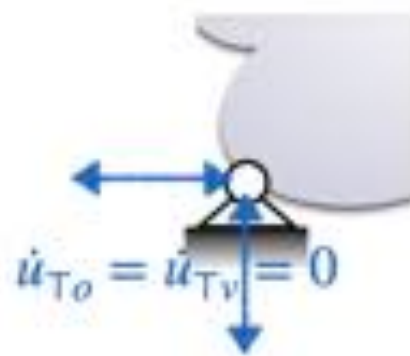
ogni vincolo ha  
un Grado di Vincolo (GdV)  
per il GdL impedito

a ogni GdV corrisponde una  
Reazione Vincolare (RV)

ogni corpo (*in 2D*) ha  
3 Gradi di Libertà (GdL)



GdV=1



GdV=2

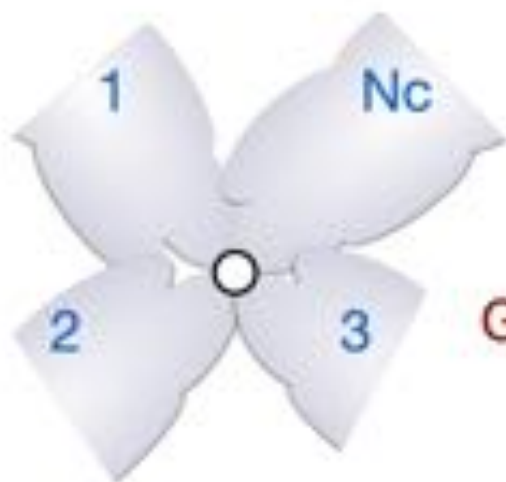


GdV=3

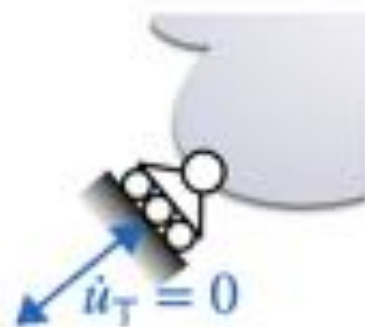
# Classificazione delle strutture

in base ai vincoli

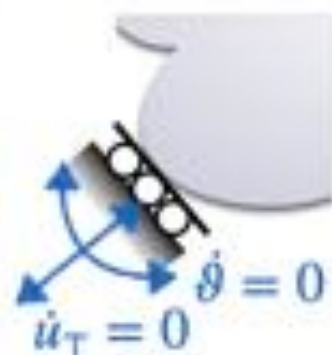
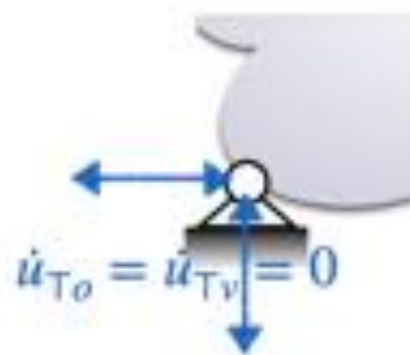
ogni vincolo ha  
un Grado di Vincolo (GdV)  
per il GdL impedito



$$\text{GdV} = 2 \times (N_c - 1)$$



$$\text{GdV} = 1$$



$$\text{GdV} = 2$$



$$\text{GdV} = 3$$



# Classificazione delle strutture

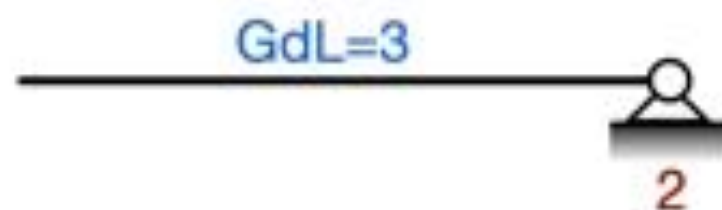
solvibilità per il  
calcolo delle RV

$$GdL = GdV$$



struttura "ISOSTATICA"  
soluzione dell'equilibrio  
(sistema di equazioni)  
esiste ed è unica

$$GdL > GdV$$



struttura "LABILE"  
sistema di equazioni  
impossibile

$$GdL < GdV$$



struttura "IPERSTATICA"  
sistema di equazioni  
indeterminato



# Classificazione delle strutture

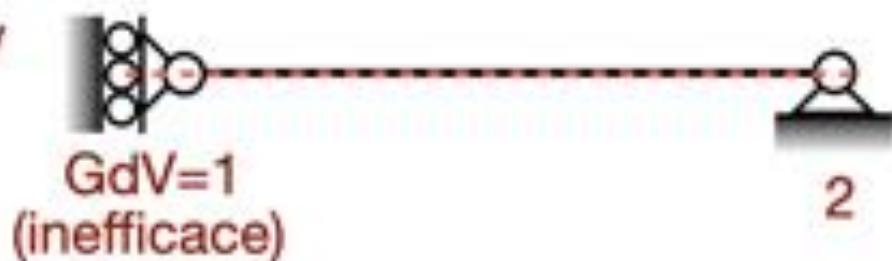
casi degeneri  
(vincoli INEFFICACI)

$$GdL = GdV$$



struttura "ISOSTATICA"  
soluzione dell'equilibrio  
(sistema di equazioni)  
esiste ed è unica

$$GdL > GdV$$



struttura "LABILE"  
sistema di equazioni  
impossibile

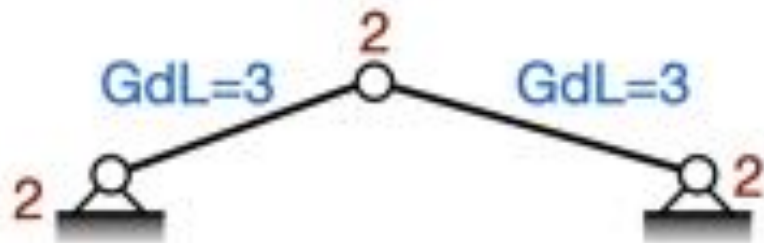
$$GdL < GdV$$

struttura "IPERSTATICA"  
sistema di equazioni  
indeterminato

# Classificazione delle strutture

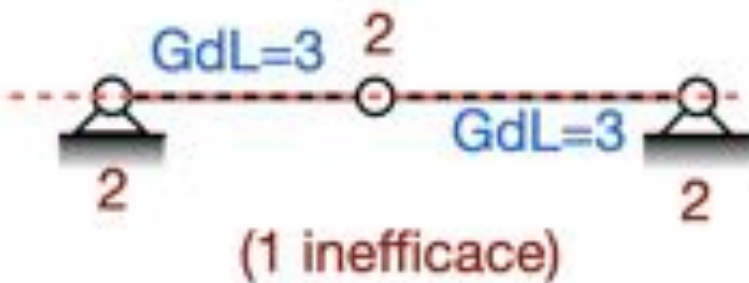
casi degeneri  
(vincoli INEFFICACI)

$GdL = GdV$



struttura "ISOSTATICA"  
soluzione dell'equilibrio  
(sistema di equazioni)  
esiste ed è unica

$GdL > GdV$



struttura "LABILE"  
sistema di equazioni  
impossibile

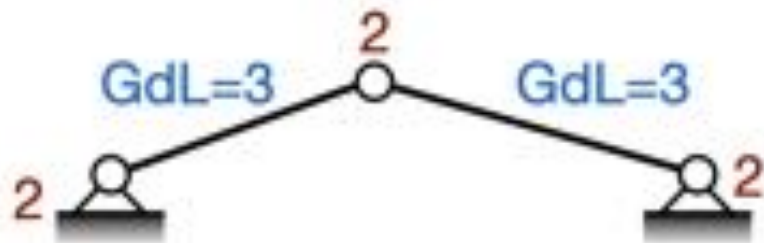
$GdL < GdV$

struttura "IPERSTATICA"  
sistema di equazioni  
indeterminato

# Classificazione delle strutture

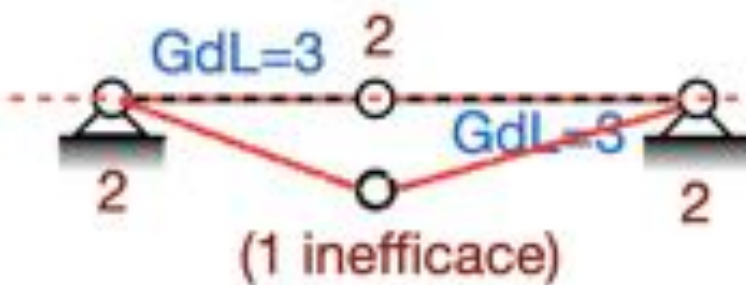
casi degeneri  
(vincoli INEFFICACI)

$GdL = GdV$



struttura "ISOSTATICA"  
soluzione dell'equilibrio  
(sistema di equazioni)  
esiste ed è unica

$GdL > GdV$



struttura "LABILE"  
sistema di equazioni  
impossibile

$GdL < GdV$

struttura "IPERSTATICA"  
sistema di equazioni  
indeterminato

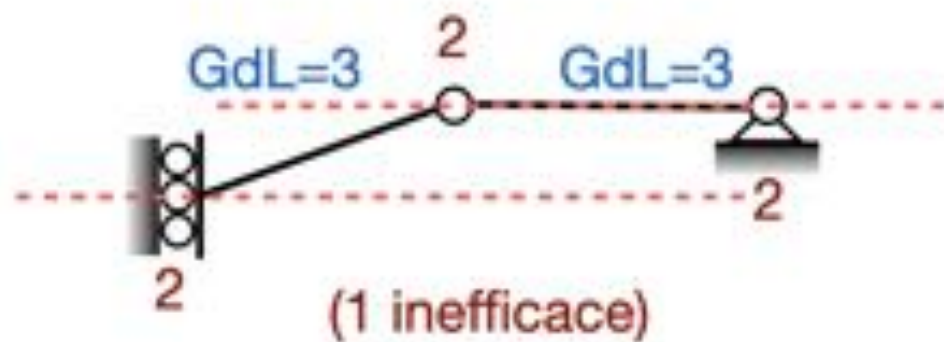
# Classificazione delle strutture

casi degeneri  
(vincoli INEFFICACI)

$GdL = GdV$

struttura "ISOSTATICA"  
soluzione dell'equilibrio  
(sistema di equazioni)  
esiste ed è unica

$GdL > GdV$



struttura "LABILE"  
sistema di equazioni  
impossibile

$GdL < GdV$

struttura "IPERSTATICA"  
sistema di equazioni  
indeterminato



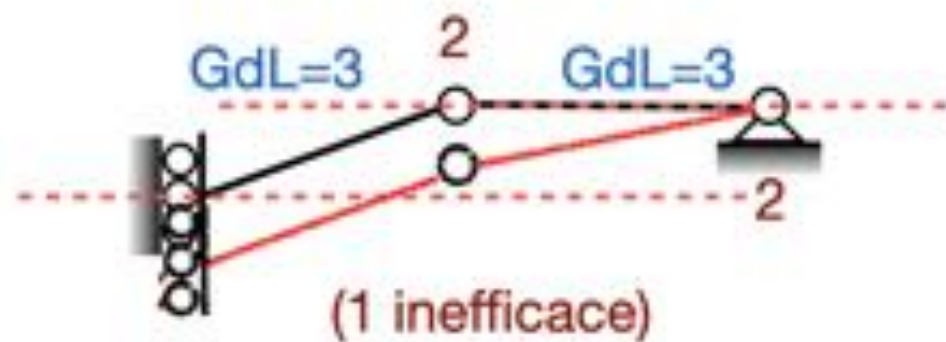
# Classificazione delle strutture

casi degeneri  
(vincoli INEFFICACI)

$GdL = GdV$

struttura "ISOSTATICA"  
soluzione dell'equilibrio  
(sistema di equazioni)  
esiste ed è unica

$GdL > GdV$



struttura "LABILE"  
sistema di equazioni  
impossibile

$GdL < GdV$

struttura "IPERSTATICA"  
sistema di equazioni  
indeterminato

# Classificazione delle strutture

$GdL = GdV$  (- V inefficaci)

struttura "ISOSTATICA"  
soluzione dell'equilibrio  
esiste ed è unica

---

$GdL > GdV$  (- V inefficaci)

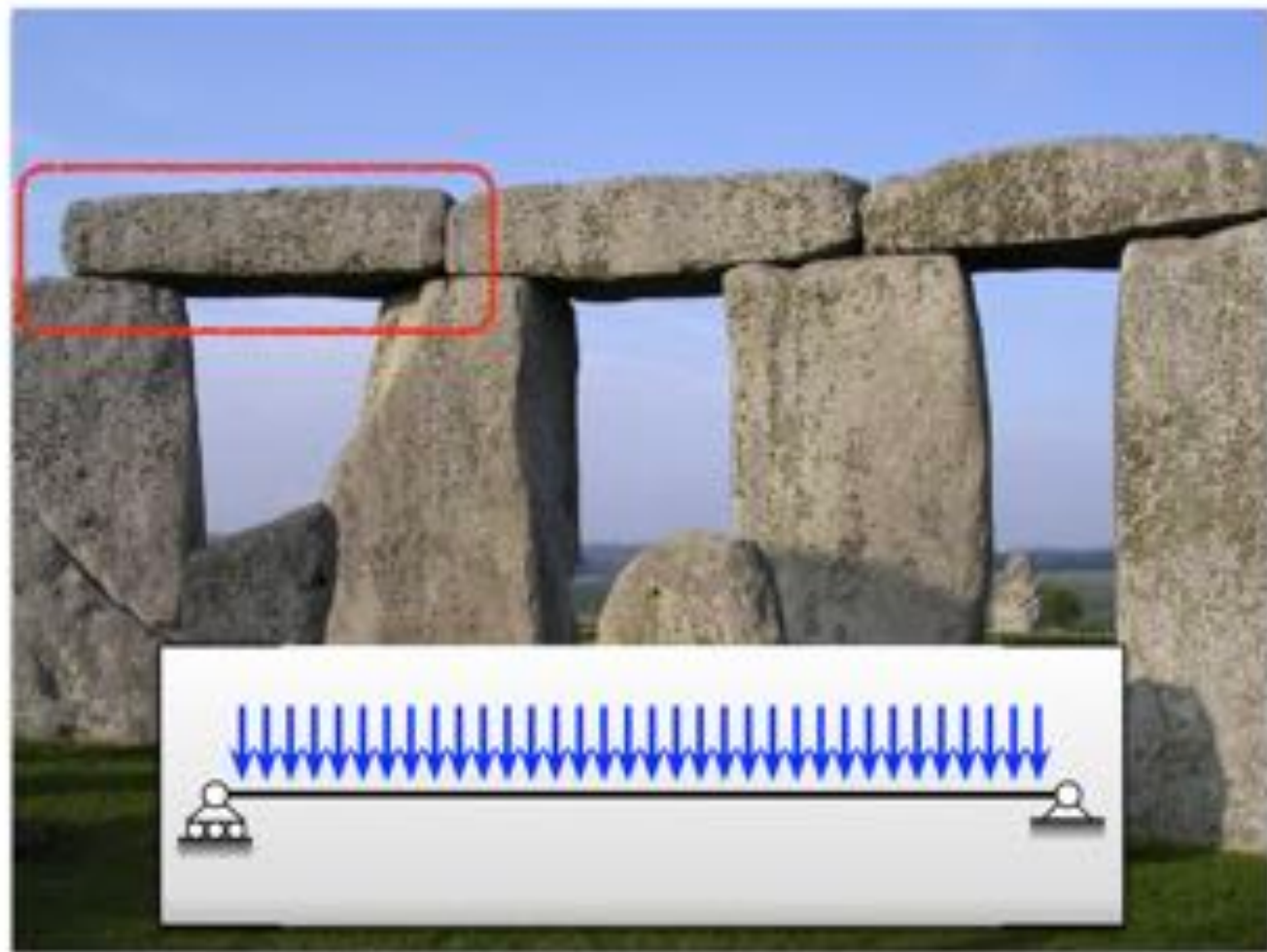
struttura "LABILE"  
soluzione dell'equilibrio  
impossibile

---

$GdL < GdV$  (- V inefficaci)

struttura "IPERSTATICA"  
soluzione dell'equilibrio  
indeterminata

## Trave (semplicemente) appoggiata



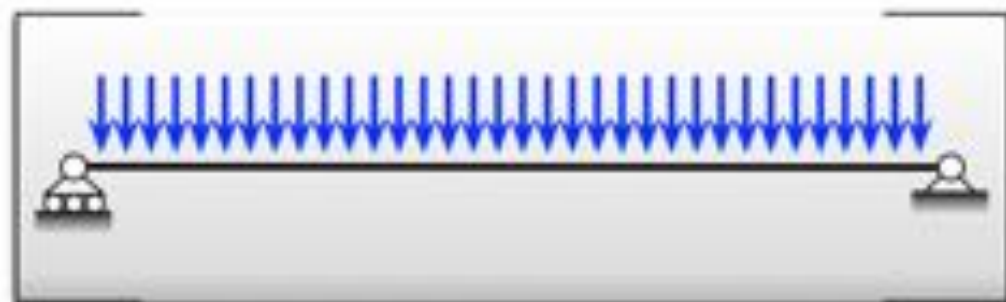


# Trave (semplicemente) appoggiata

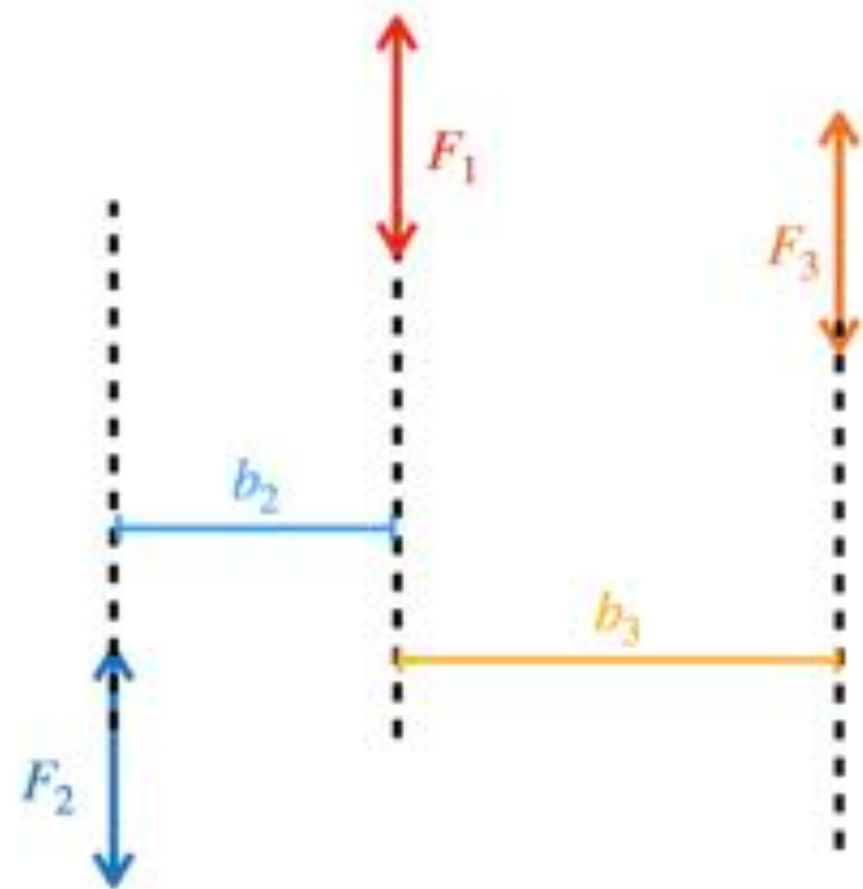




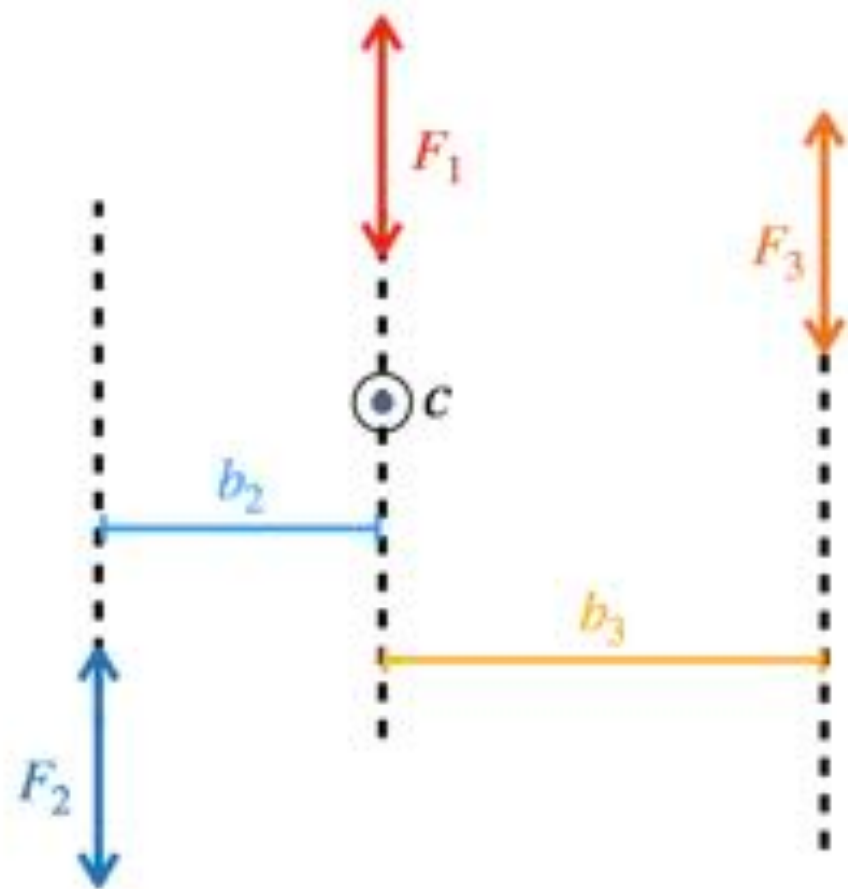
# Trave (semplicemente) appoggiata



# Equilibrio "leva"



# Equilibrio "leva"



Traslazione:  $\sum F_v = 0$

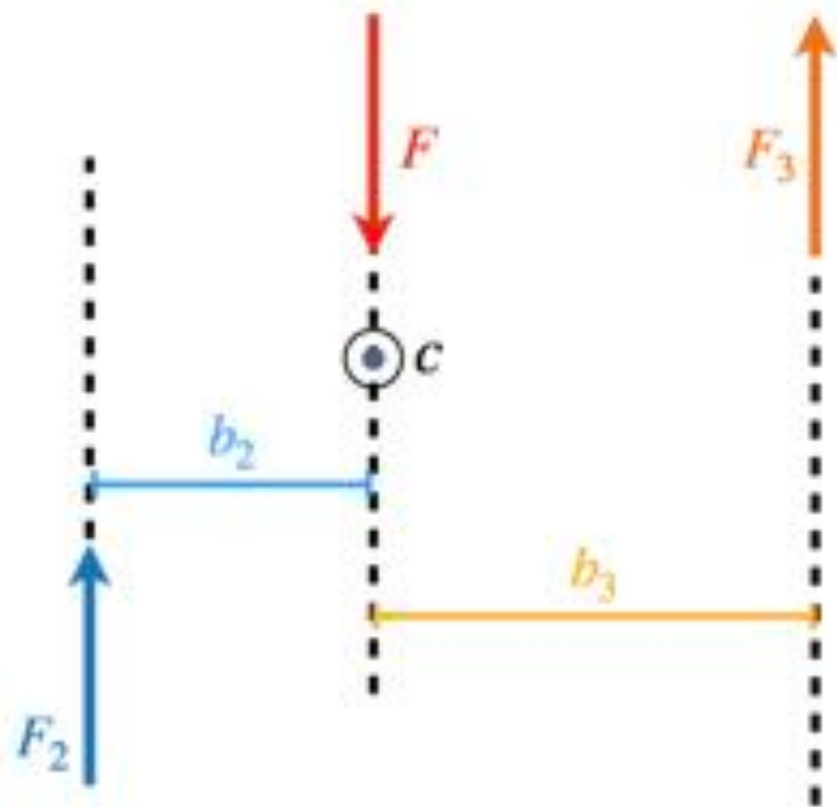
2 forze si oppongono a 1

Rotazione:  $\sum_c M = 0$

le 2 forze laterali hanno stesso verso

$$F_2 b_2 \left( \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \curvearrowleft \\ \curvearrowright \end{array} \right) F_3 b_3$$
$$F_2 b_2 \left( \begin{array}{c} \curvearrowleft \\ \curvearrowright \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} \right) F_3 b_3$$

# Equilibrio "leva"



Traslazione:  $\sum F_v = 0$

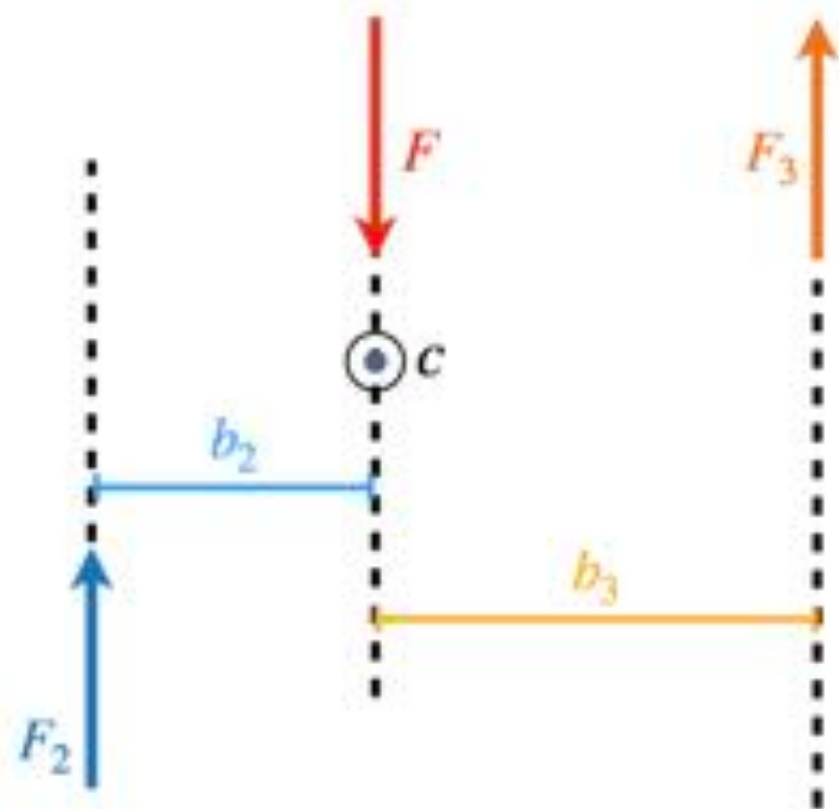
2 forze si oppongono a 1

Rotazione:  $\sum_c M = 0$

le 2 forze laterali hanno stesso verso

$$F_2 b_2 \curvearrowright = \curvearrowleft F_3 b_3$$

# Equilibrio "leva"



$$\rightarrow F_3 \left( \frac{b_3}{b_2} + 1 \right) = F$$

Traslazione:  $\sum F_v = 0$

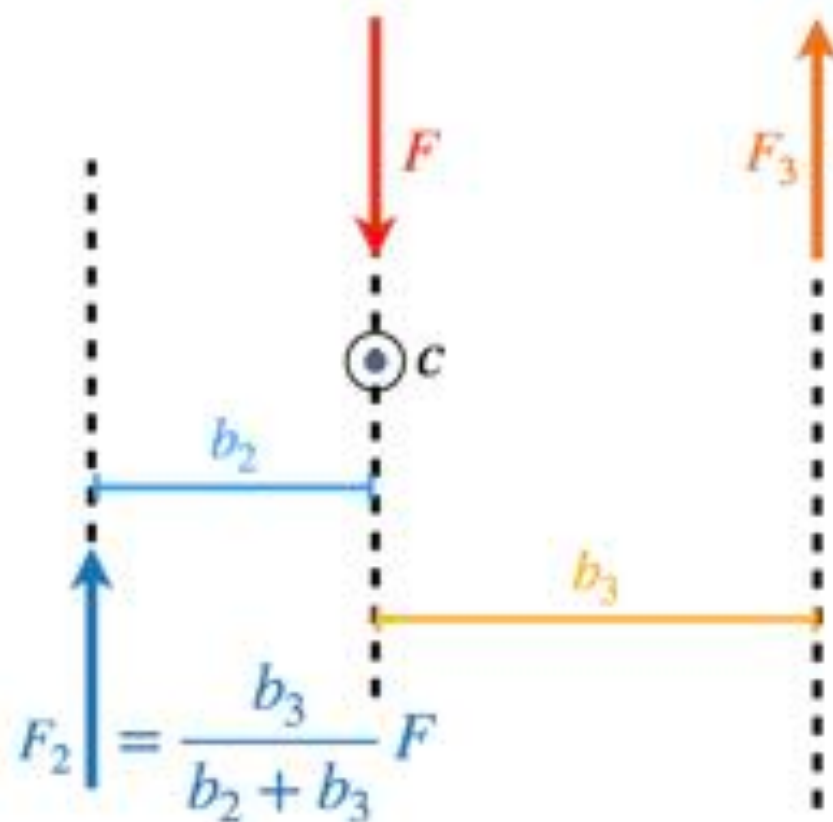
$$F_2 + F_3 = F$$

Rotazione:  $\sum_c M = 0$

$$F_2 = \frac{b_3}{b_2} F_3$$

$$F_2 b_2 \curvearrowright = \curvearrowleft F_3 b_3$$

# Equilibrio "leva"



$$\rightarrow F_3 \left( \frac{b_3}{b_2} + 1 \right) = F$$

Traslazione:  $\sum F_v = 0$

$$F_2 + F_3 = F$$

Rotazione:  $\sum_c M = 0$

$$F_2 = \frac{b_3}{b_2} F_3$$

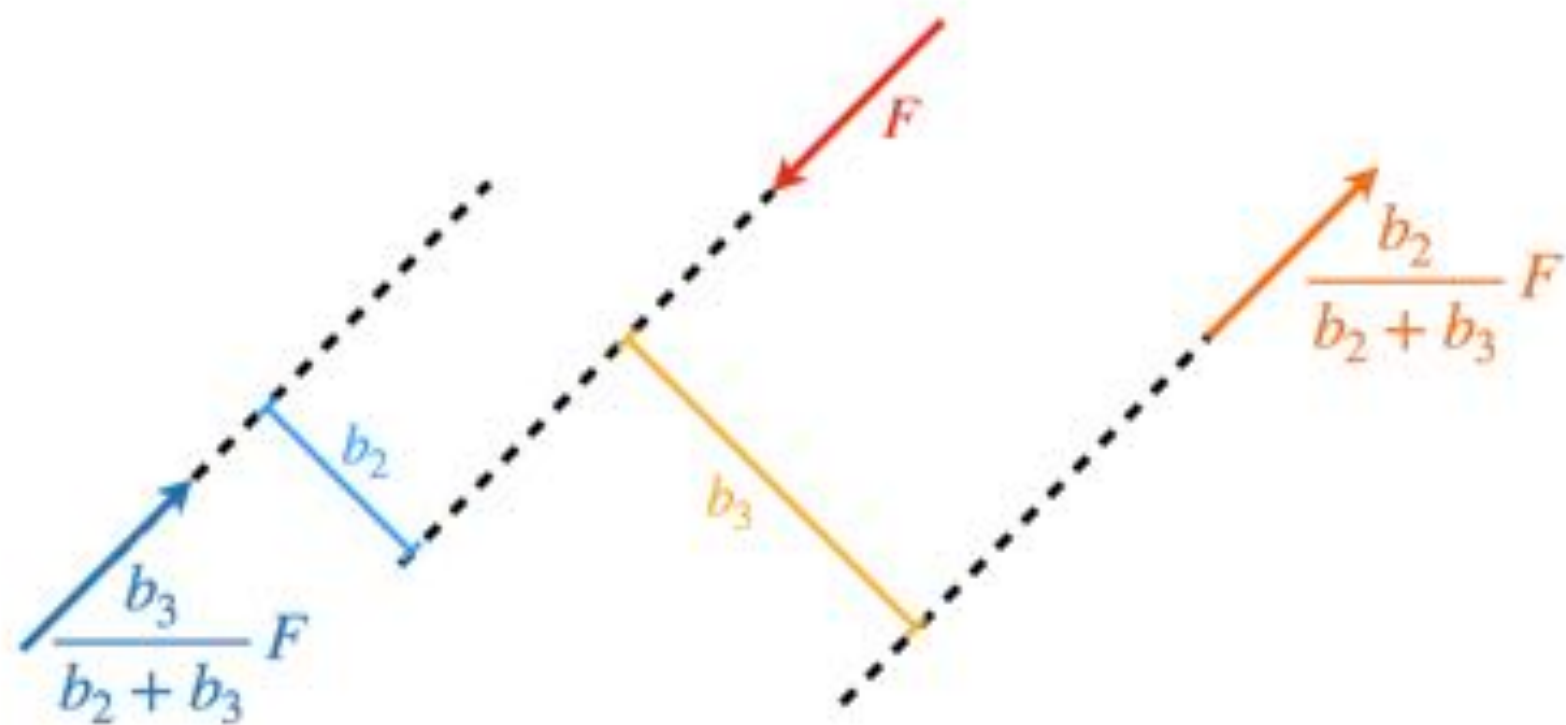
$$F_2 b_2 \curvearrowright = \curvearrowleft F_3 b_3$$

$$F_3 = \frac{b_2}{b_2 + b_3} F$$

$$F_2 = \frac{b_3}{b_2 + b_3} F$$

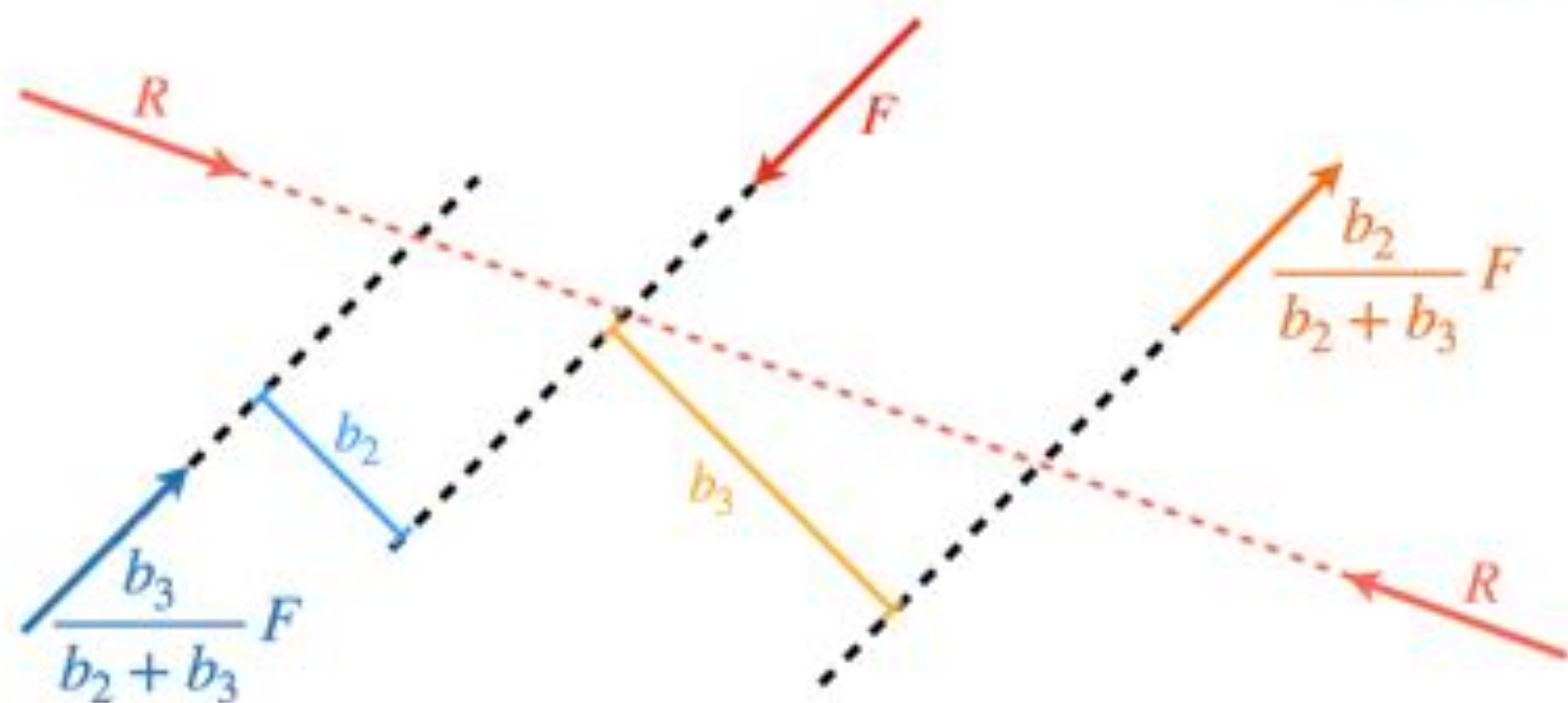


## Equilibrio "leva"



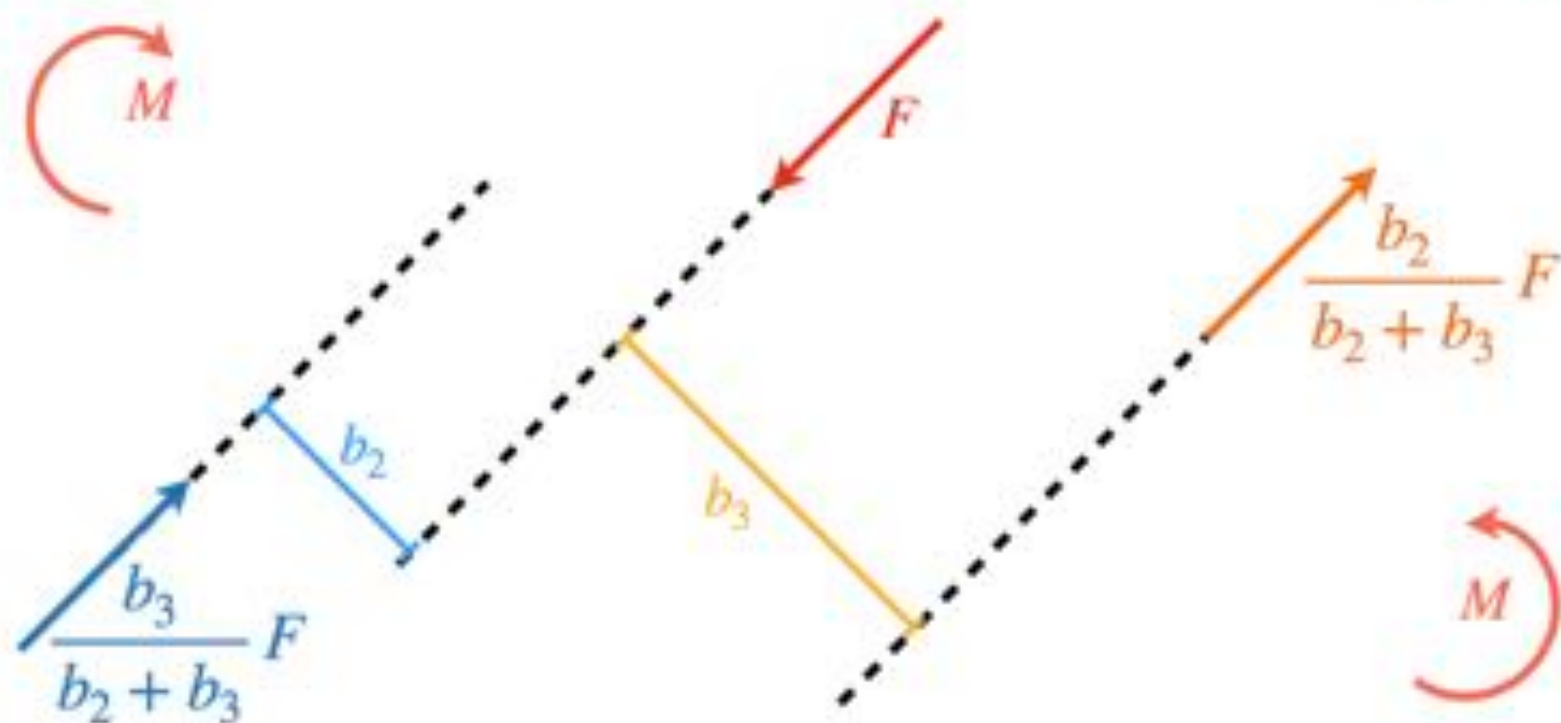
## Equilibrio "leva"

Vale ancora qualunque sistema di forza si aggiunga purché "non partecipi" all'equilibrio alla rotazione

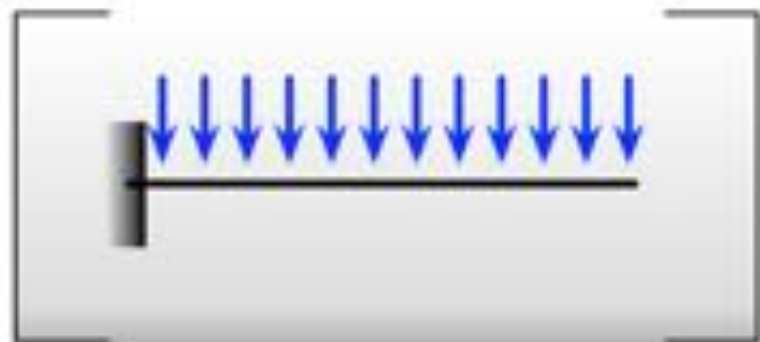


# Equilibrio "leva"

Vale ancora qualunque sistema di forza si aggiunga purché "non partecipi" all'equilibrio alla rotazione

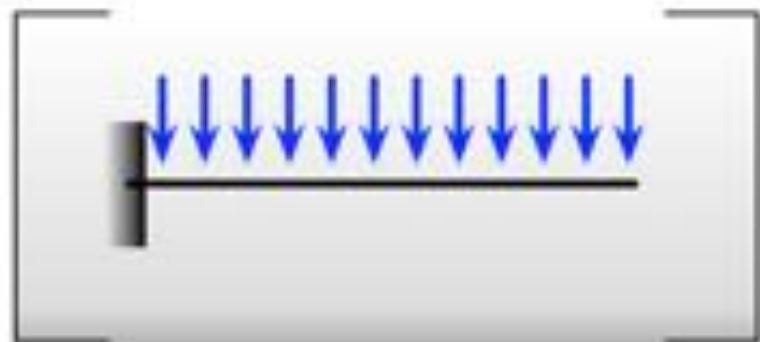


## Trave “a mensola”



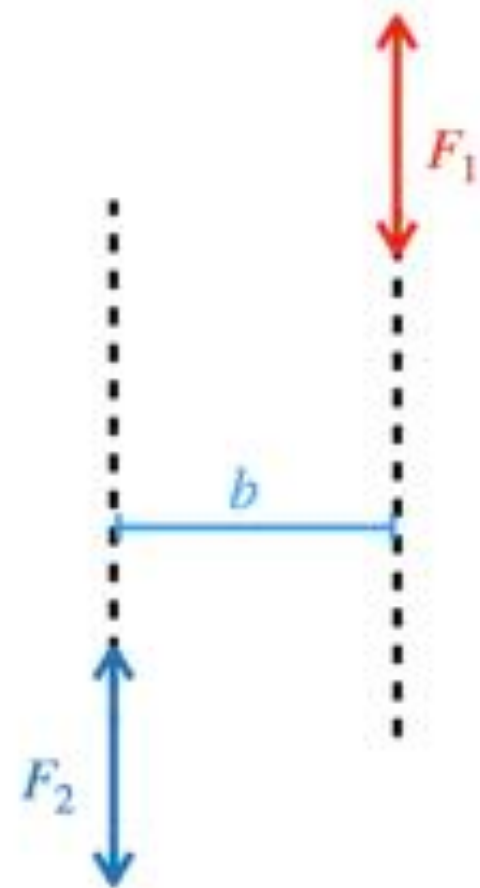
# Trave "a mensola"

G. Galilei, "Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla meccanica e i movimenti locali" (1638)

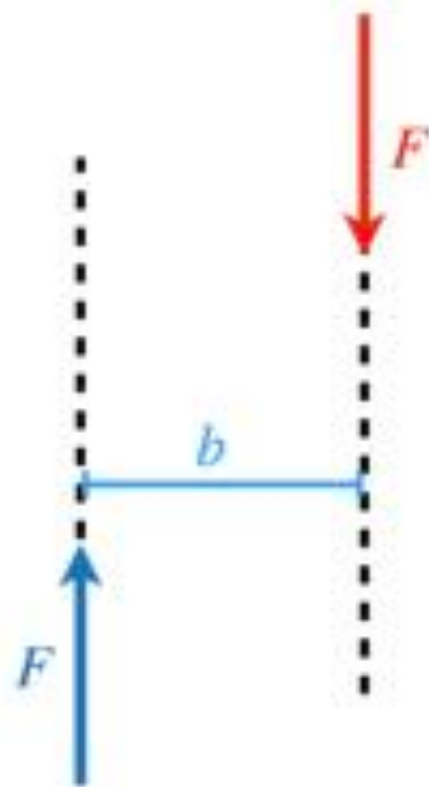




## Equilibrio “coppia-momento”



# Equilibrio “coppia-momento”



Traslazione:  $\sum F_v = 0$

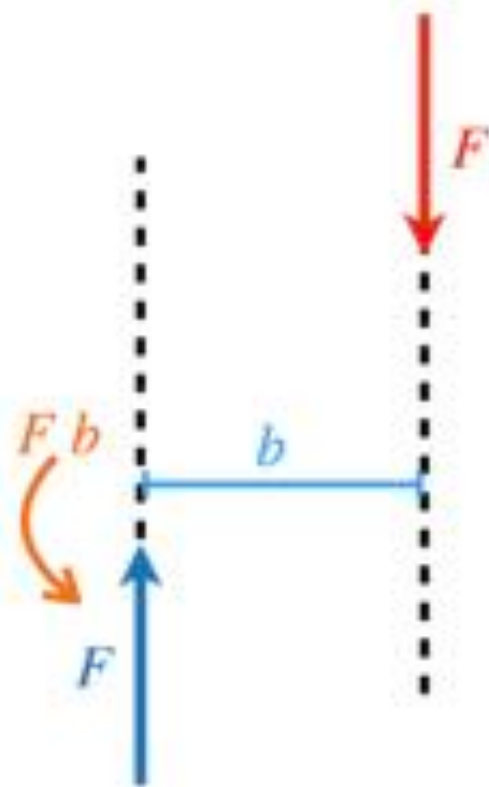
forze uguali e opposte

Rotazione:  $\sum_c M = 0$

Bilancio con la coppia

$$F b \curvearrowright = \curvearrowleft$$

# Equilibrio “coppia-momento”



Traslazione:  $\sum F_v = 0$

forze uguali e opposte

Rotazione:  $\sum_c M = 0$

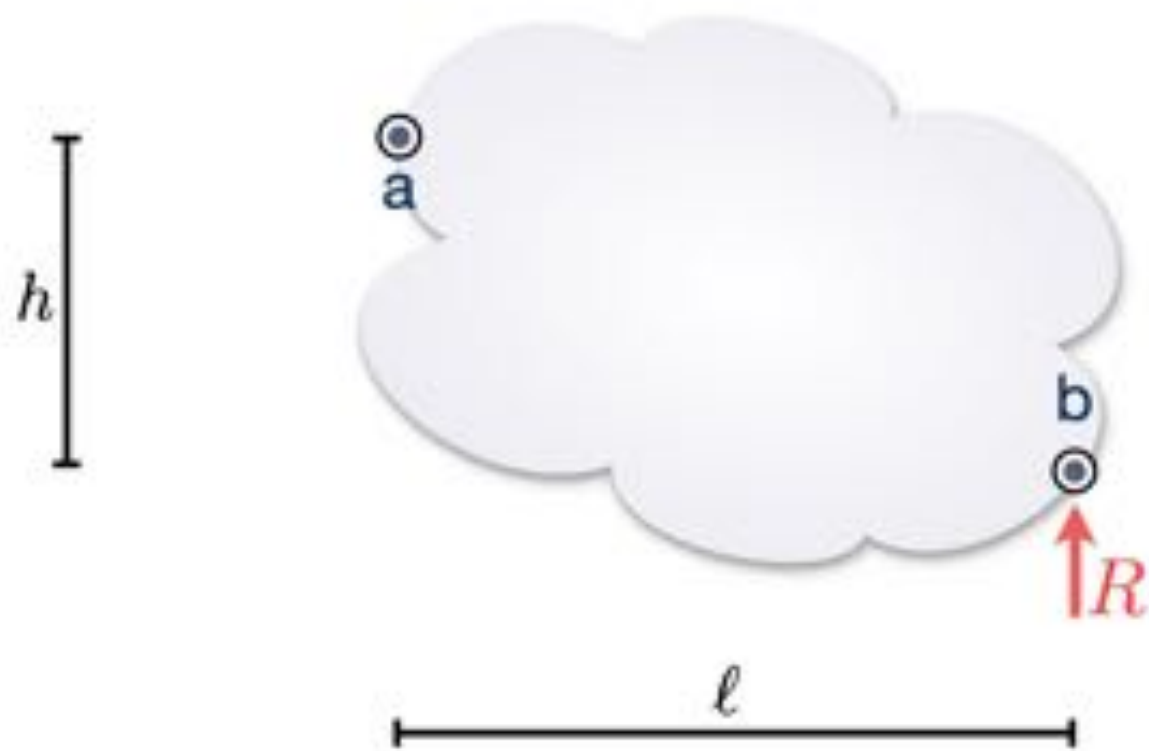
Bilancio con la coppia

$$F b \curvearrowleft = \curvearrowright$$

## Corpo scarico connesso con due cerniere

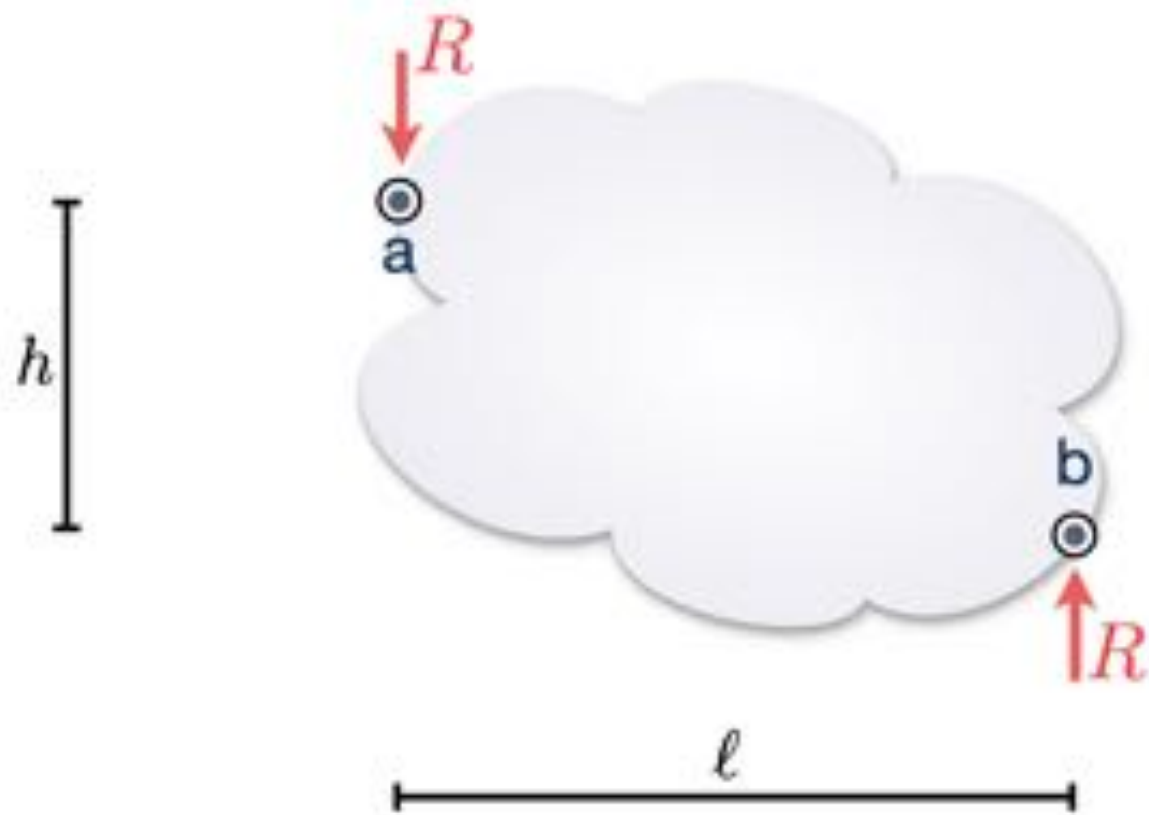


## Corpo scarico connesso con due cerniere

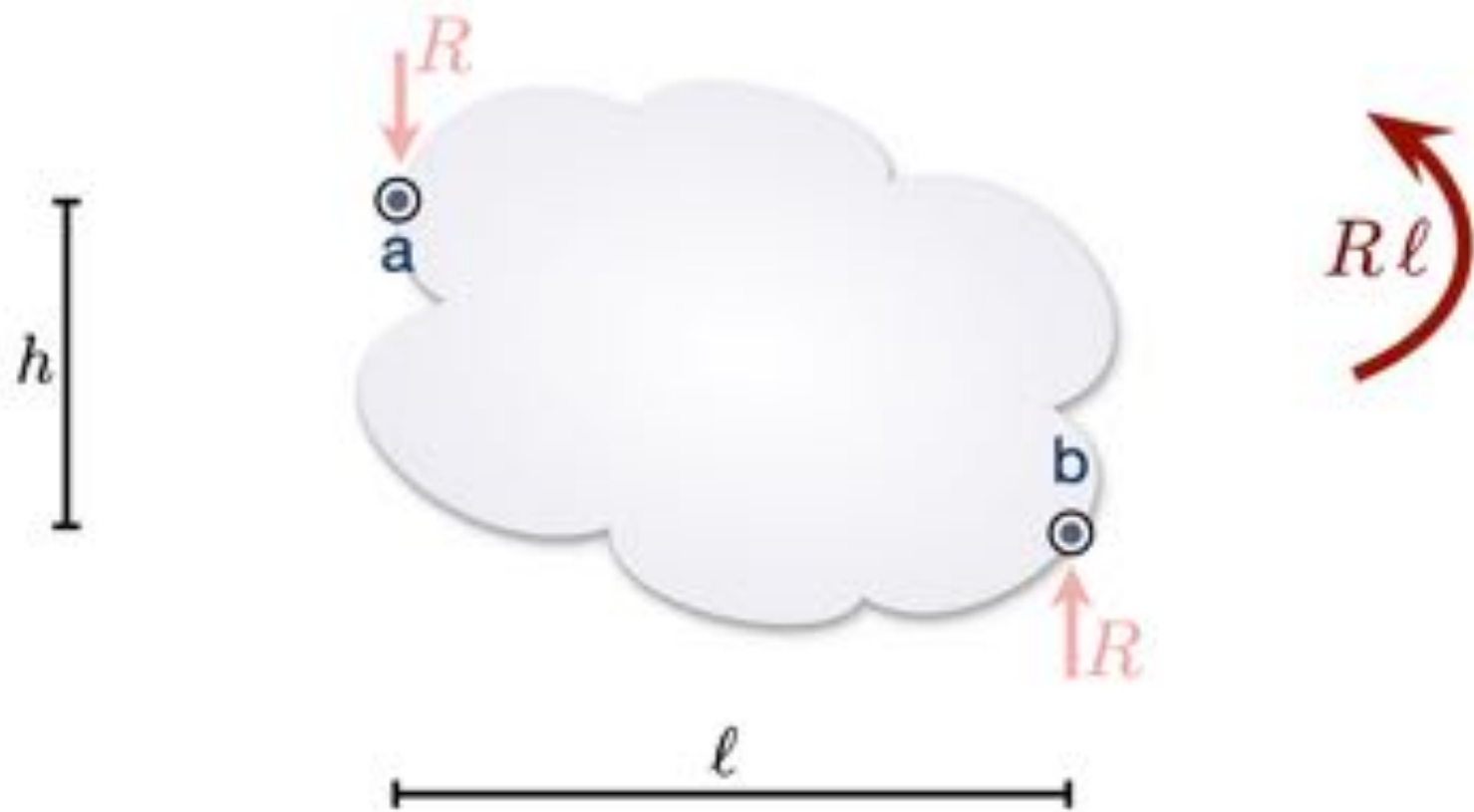




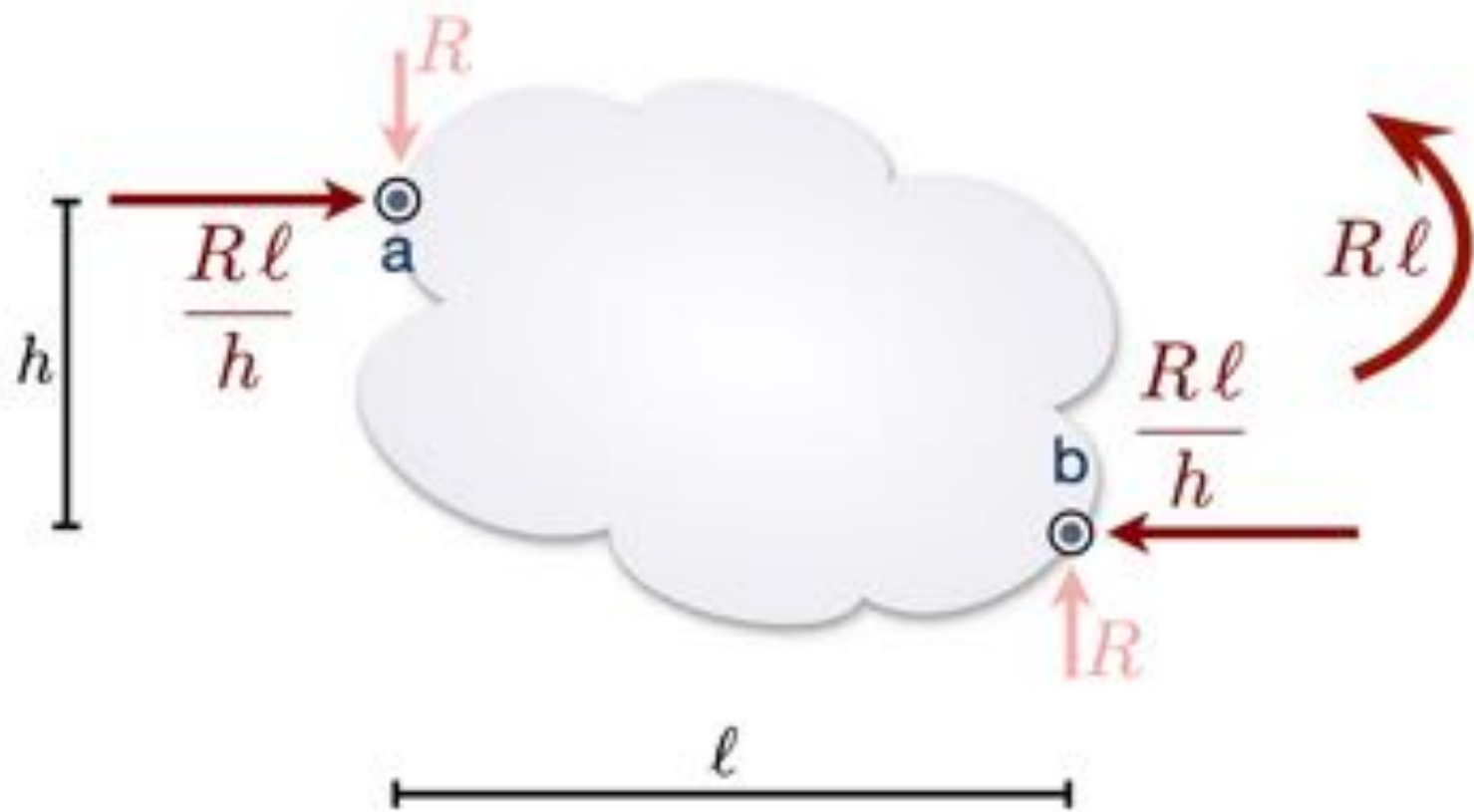
## Corpo scarico connesso con due cerniere



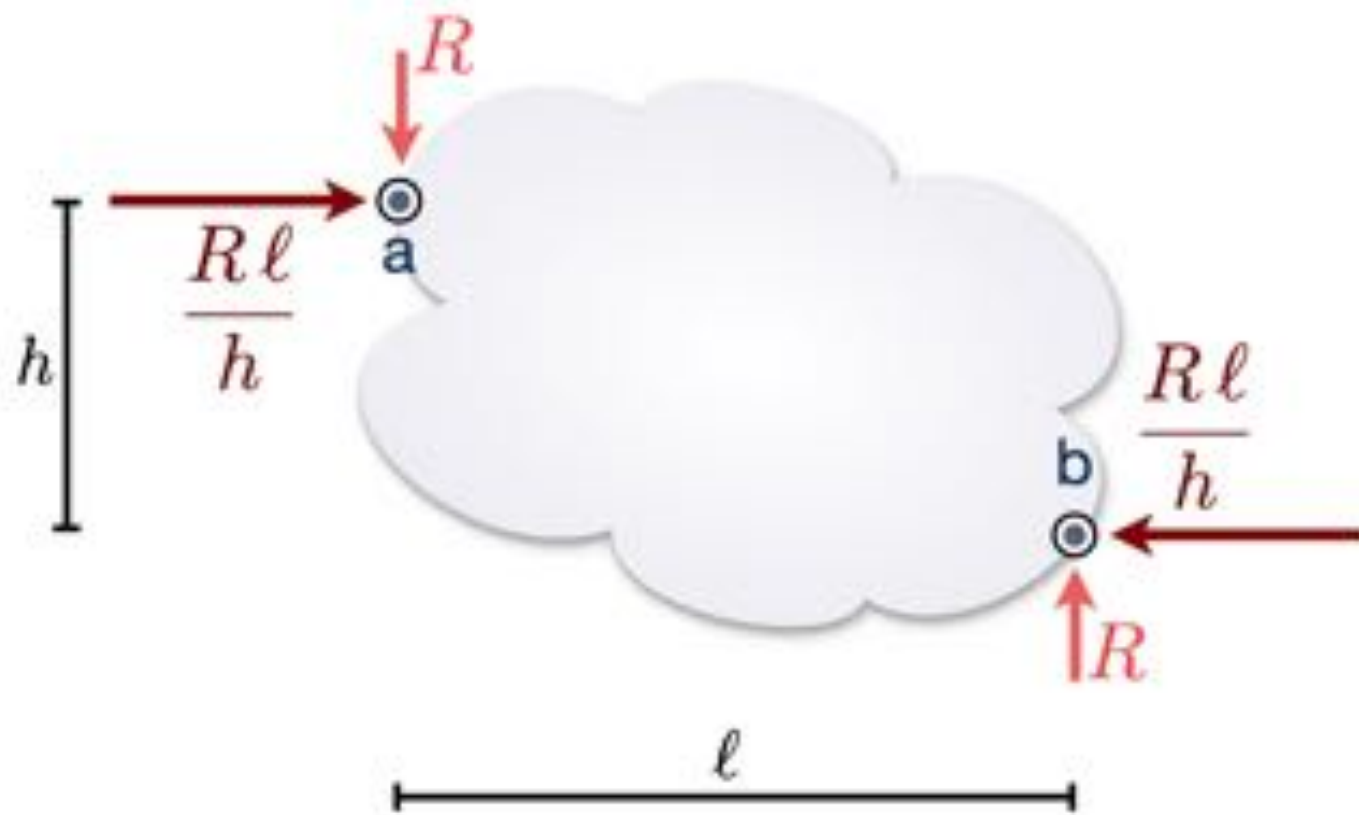
## Corpo scarico connesso con due cerniere



## Corpo scarico connesso con due cerniere



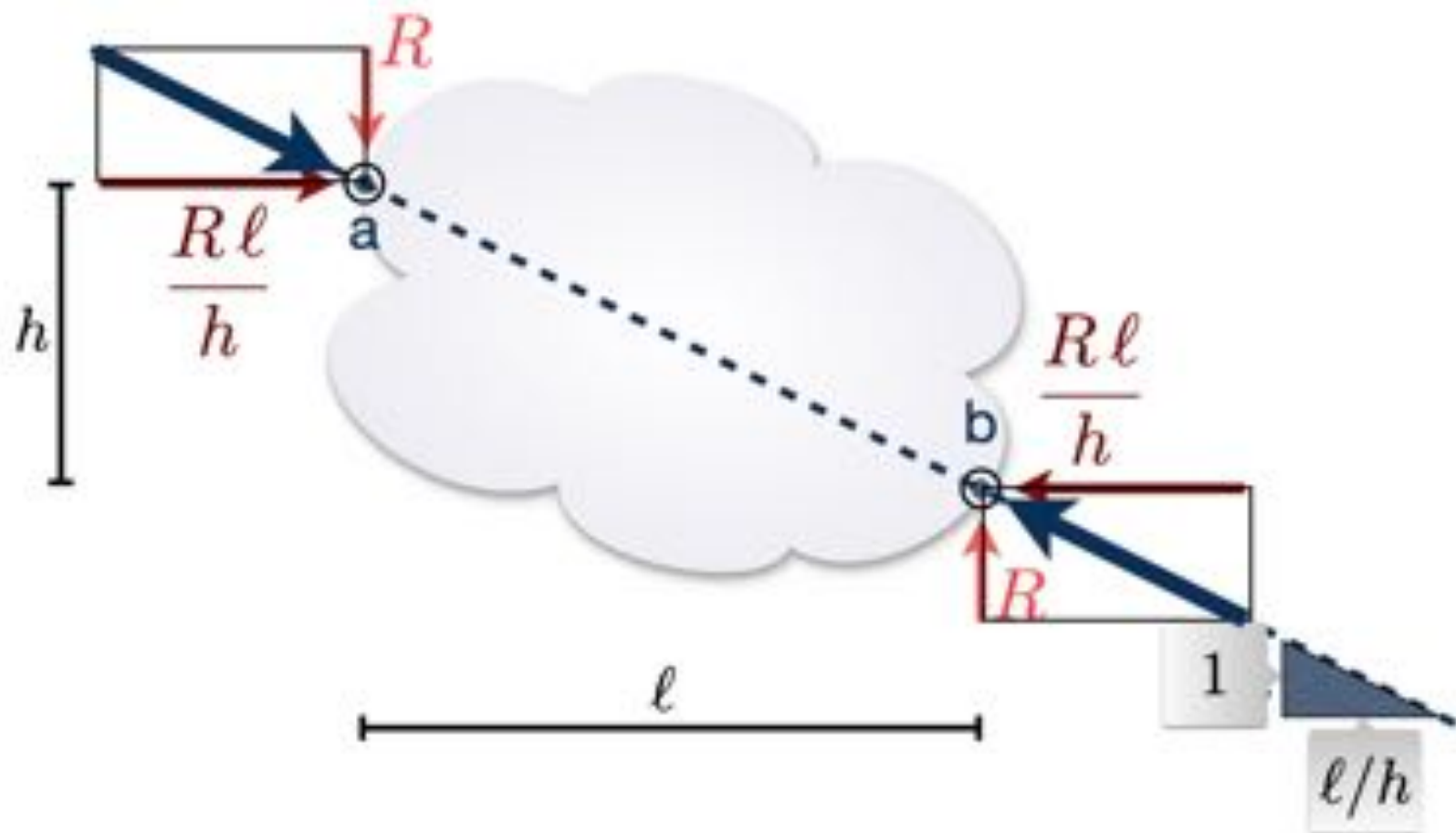
## Corpo scarico connesso con due cerniere





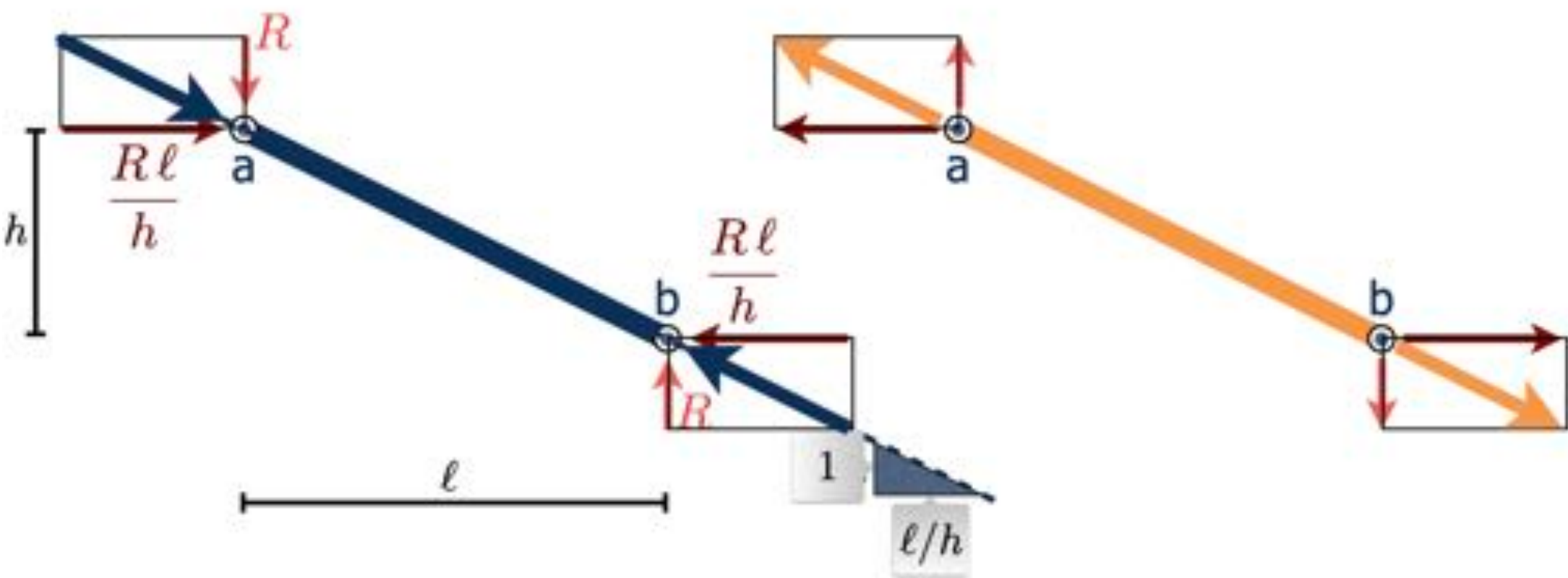


## Corpo scarico connesso con due cerniere



puntone

tirante



## Equilibrio “tirante/puntone”



cerniere interne



## Equilibrio “tirante/puntone”



cerniera esterna



cerniera interna



## Tirante/puntone come carrello





## Tirante/puntone come carrello



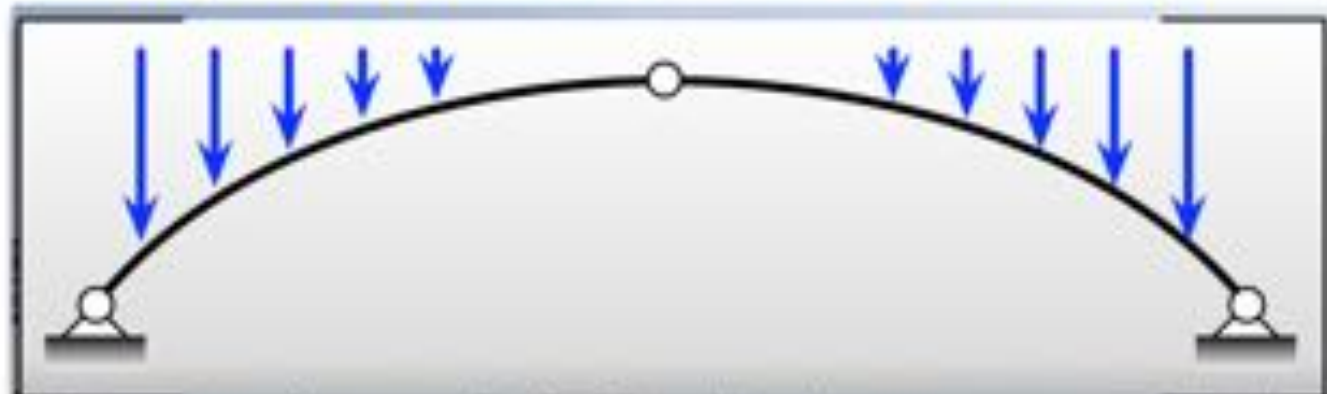
## Arco "a tre cerniere"



cerniera interna



## Arco "a tre cerniere"



cerniera interna





# Arco "a tre cerniere"



## Arco "a tre cerniere"

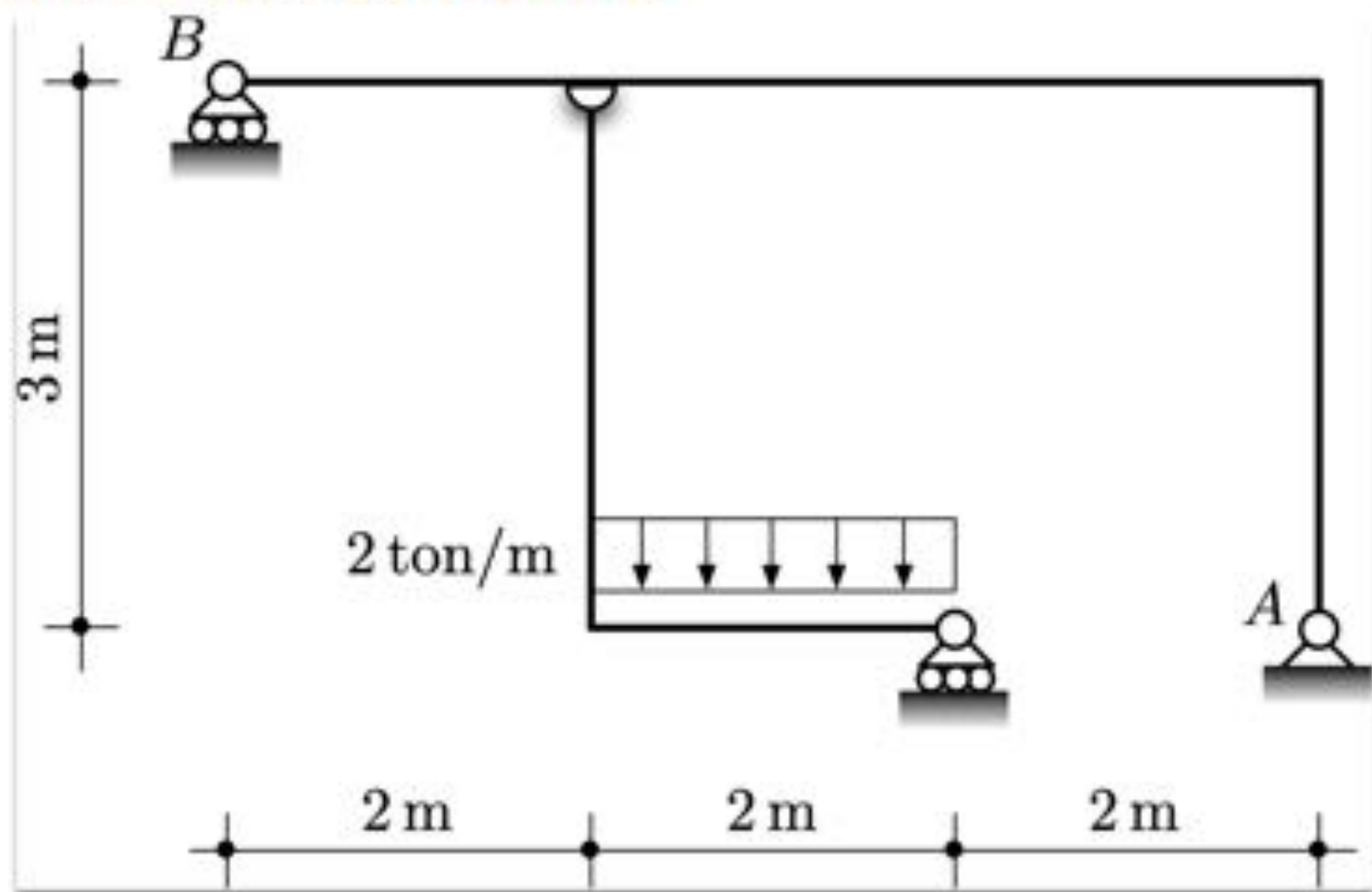


cerniera  
esterna

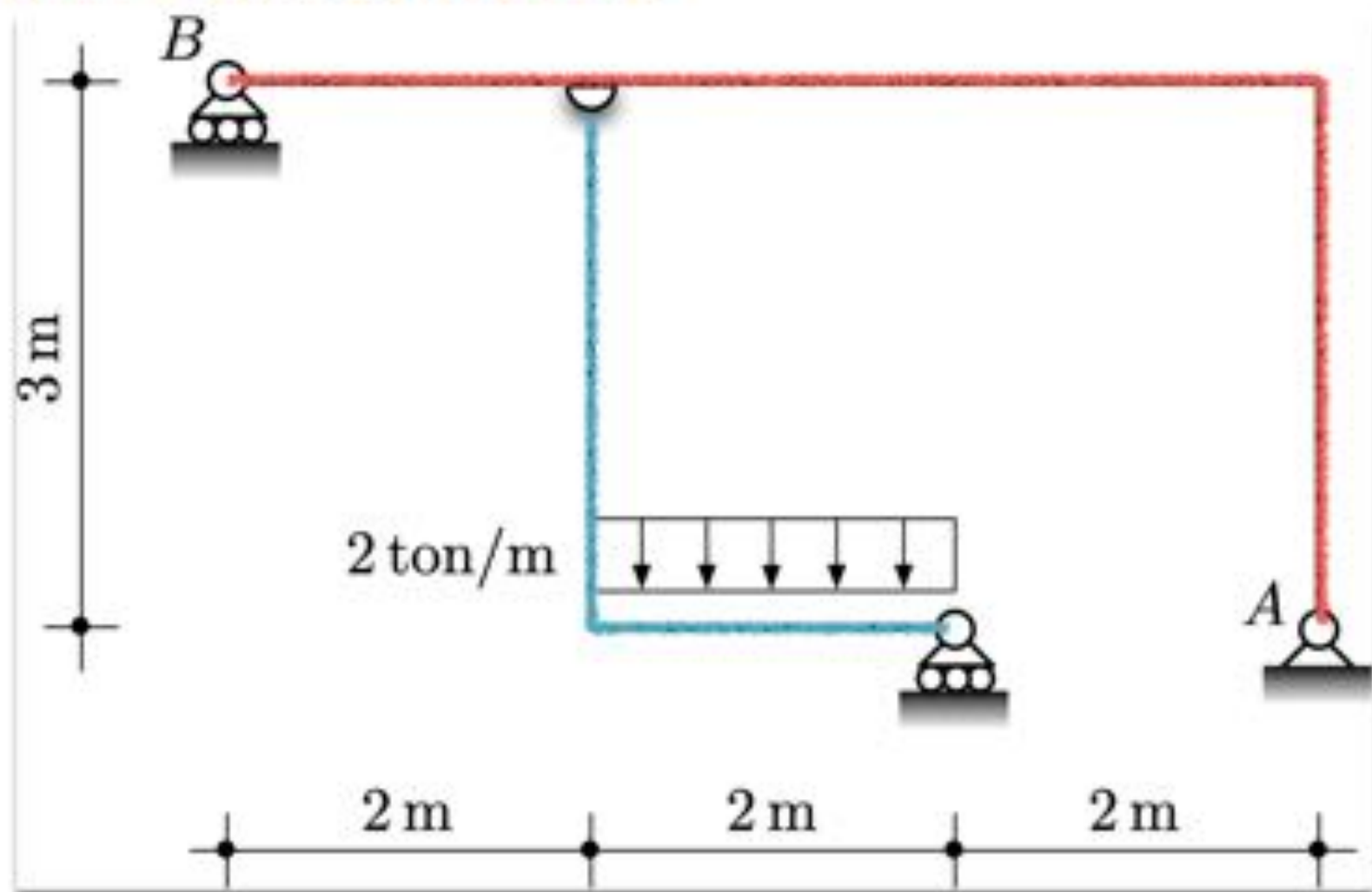
cerniera  
interna



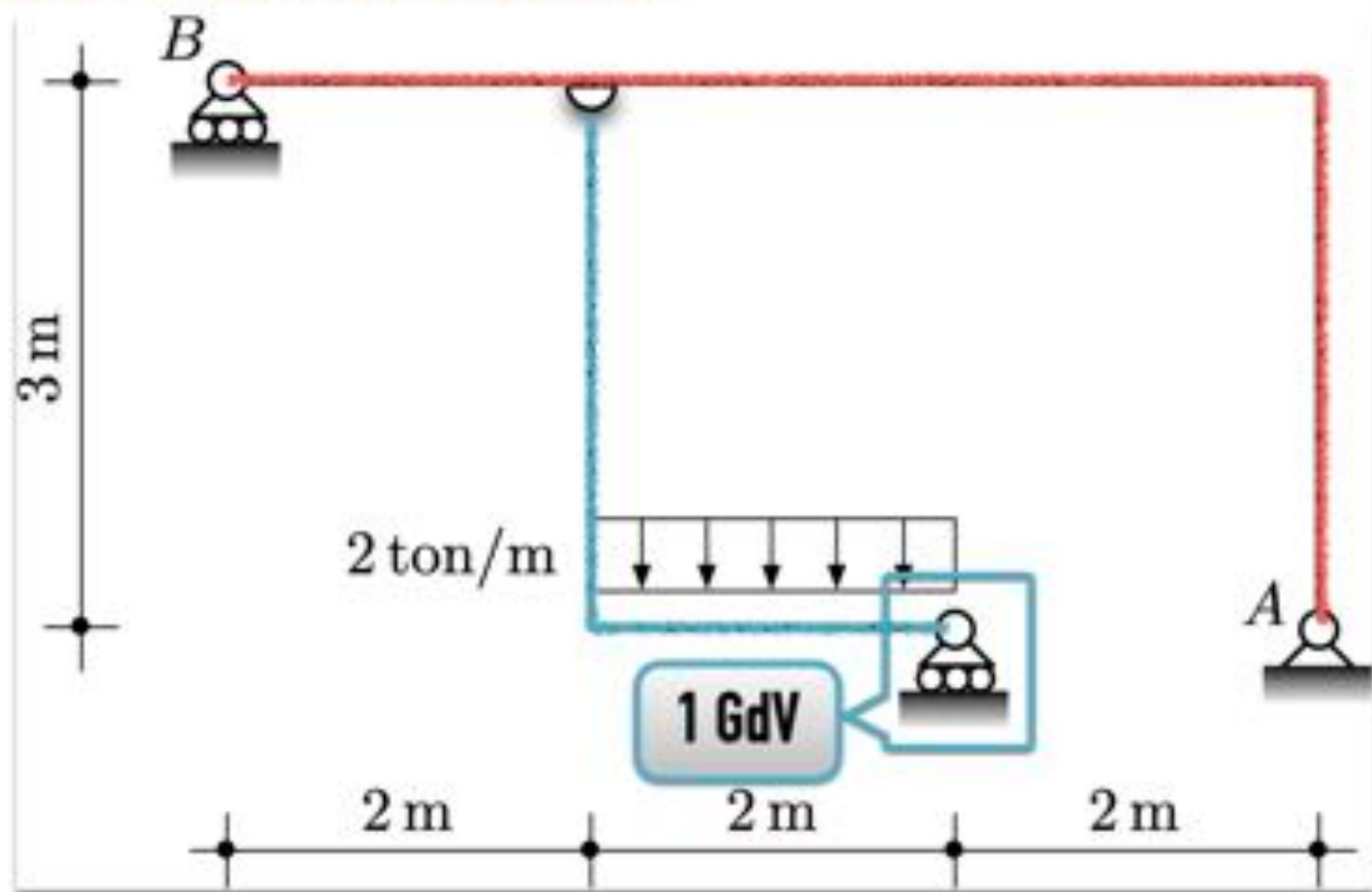
## Varianti “da esercizio”



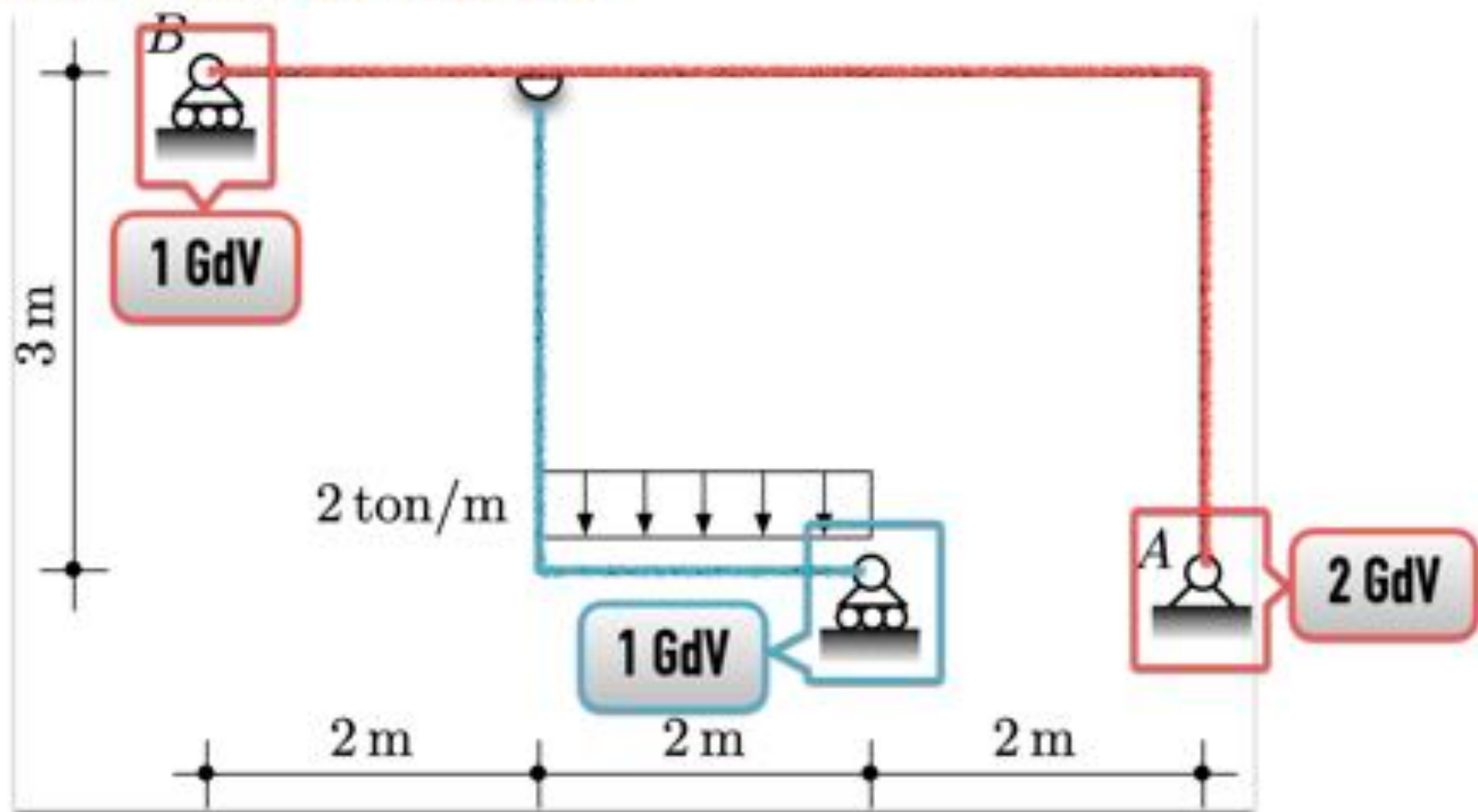
## Varianti "da esercizio"



## Varianti "da esercizio"

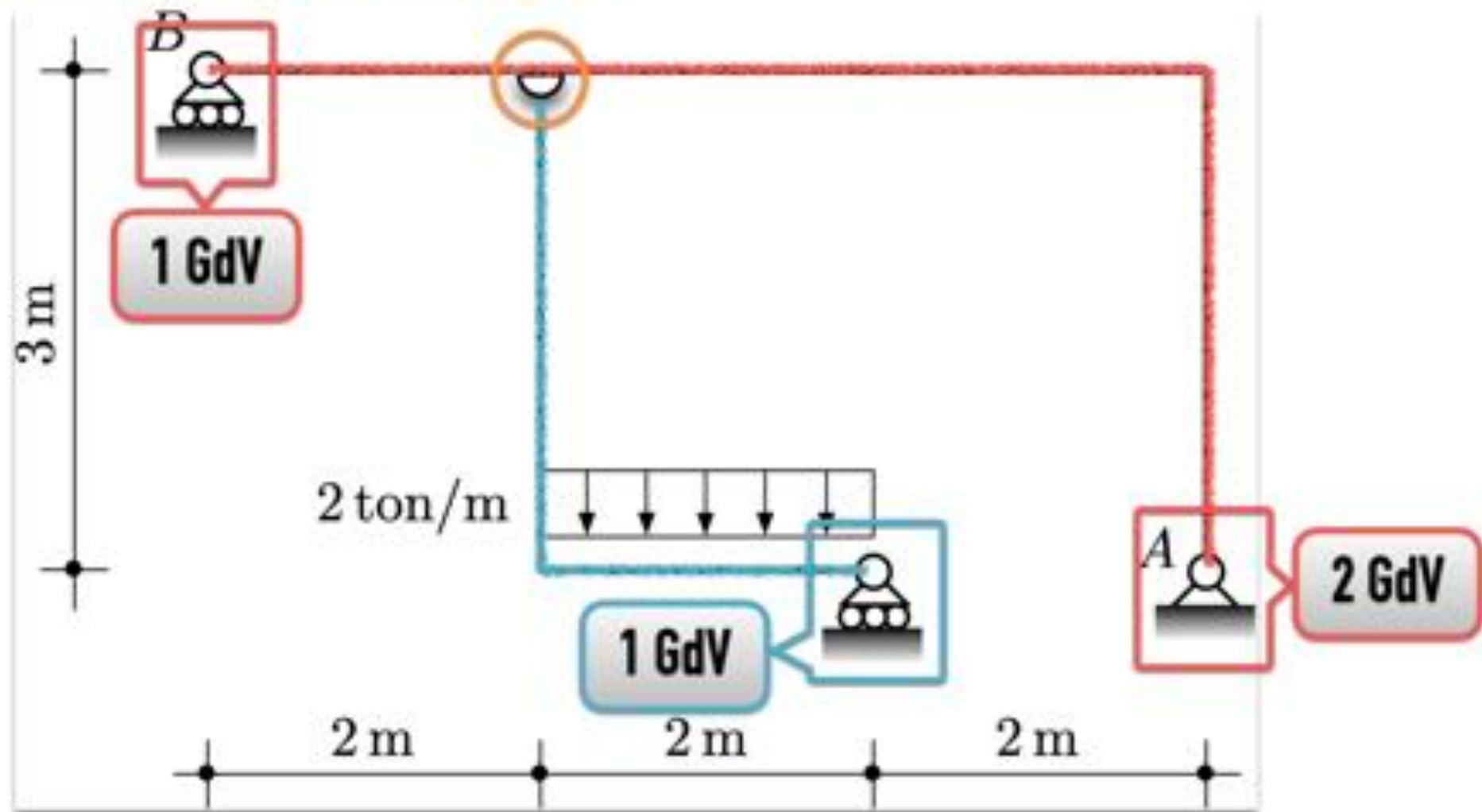


## Varianti "da esercizio"



# Varianti "da esercizio"

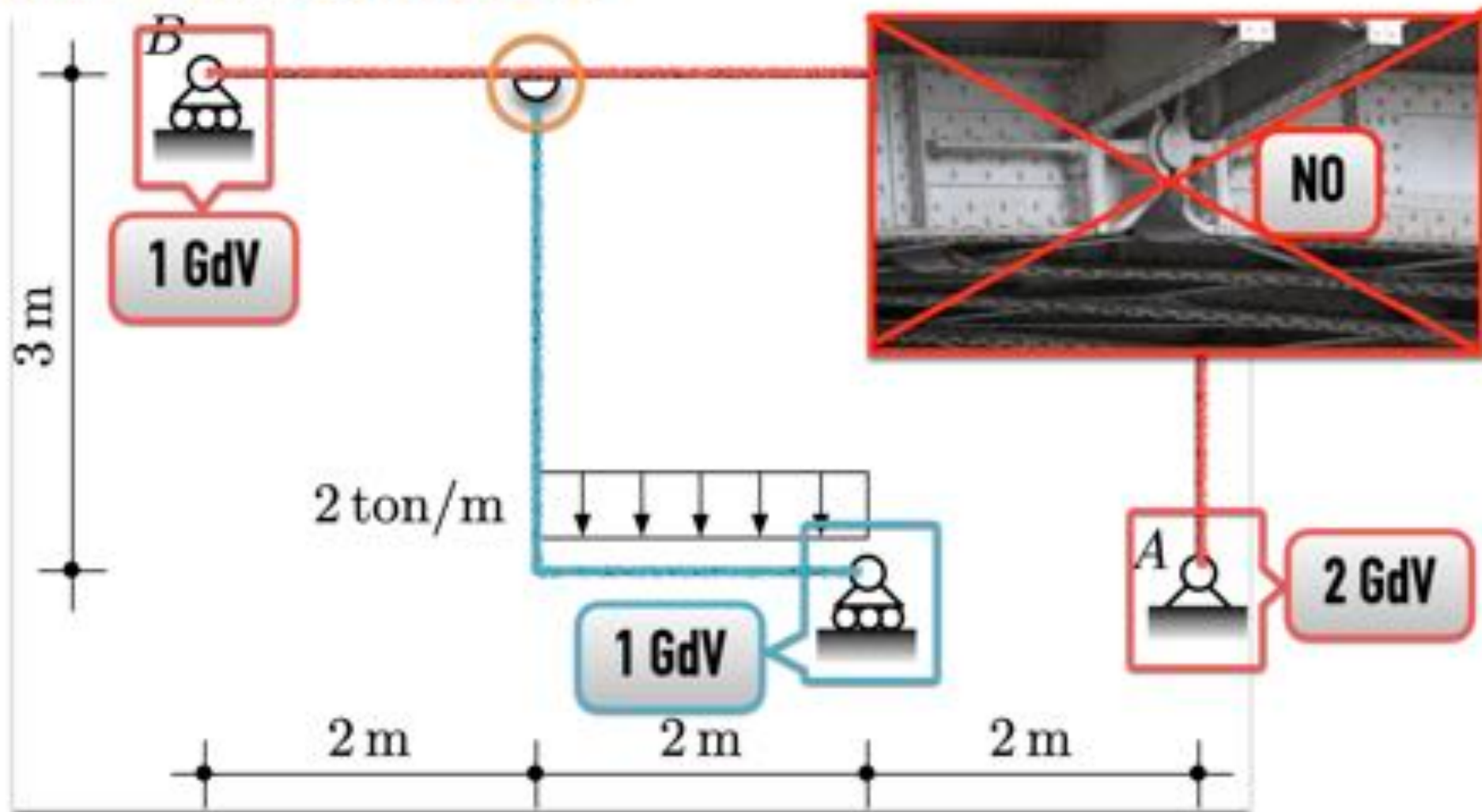
3 + 2 + 1 GdV





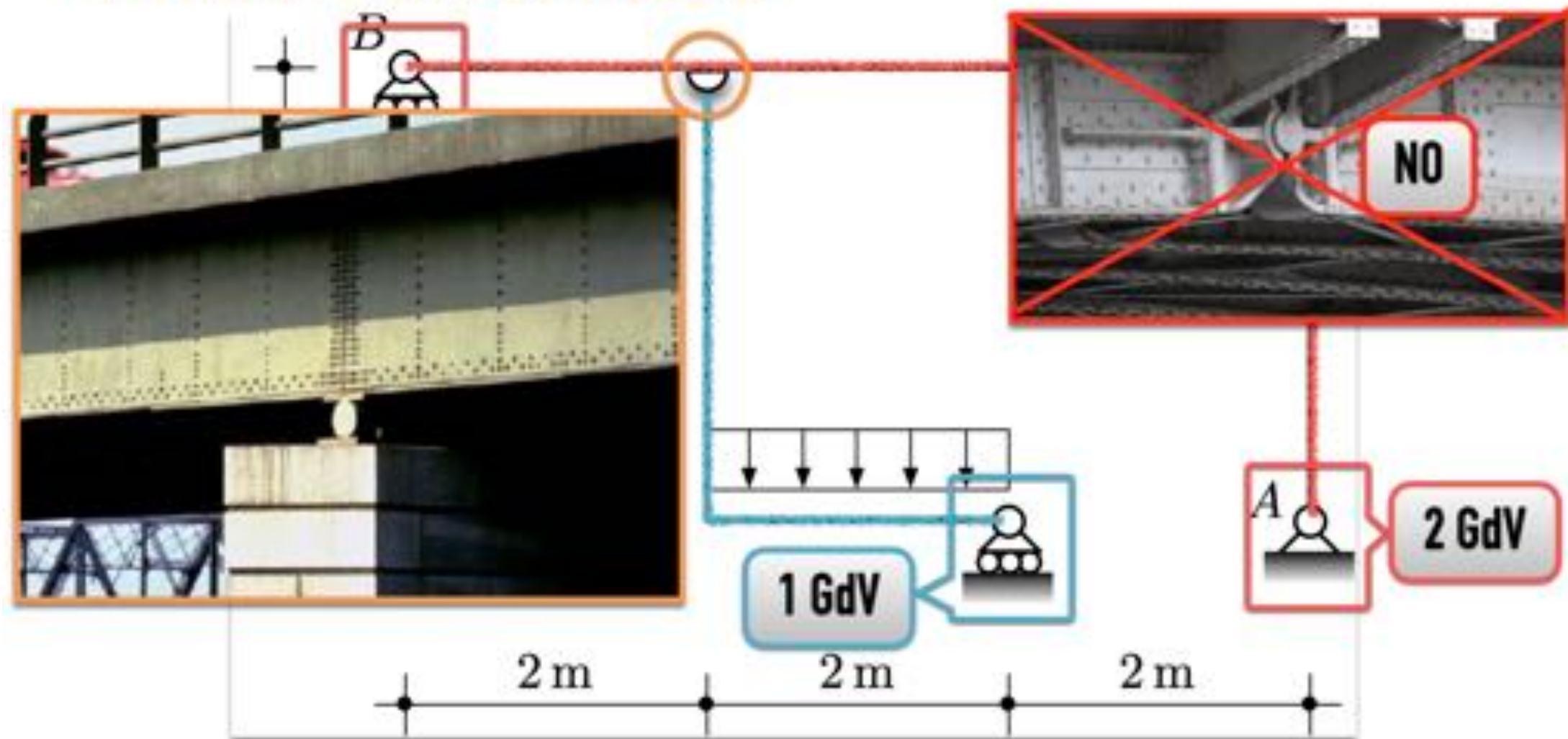
# Varianti "da esercizio"

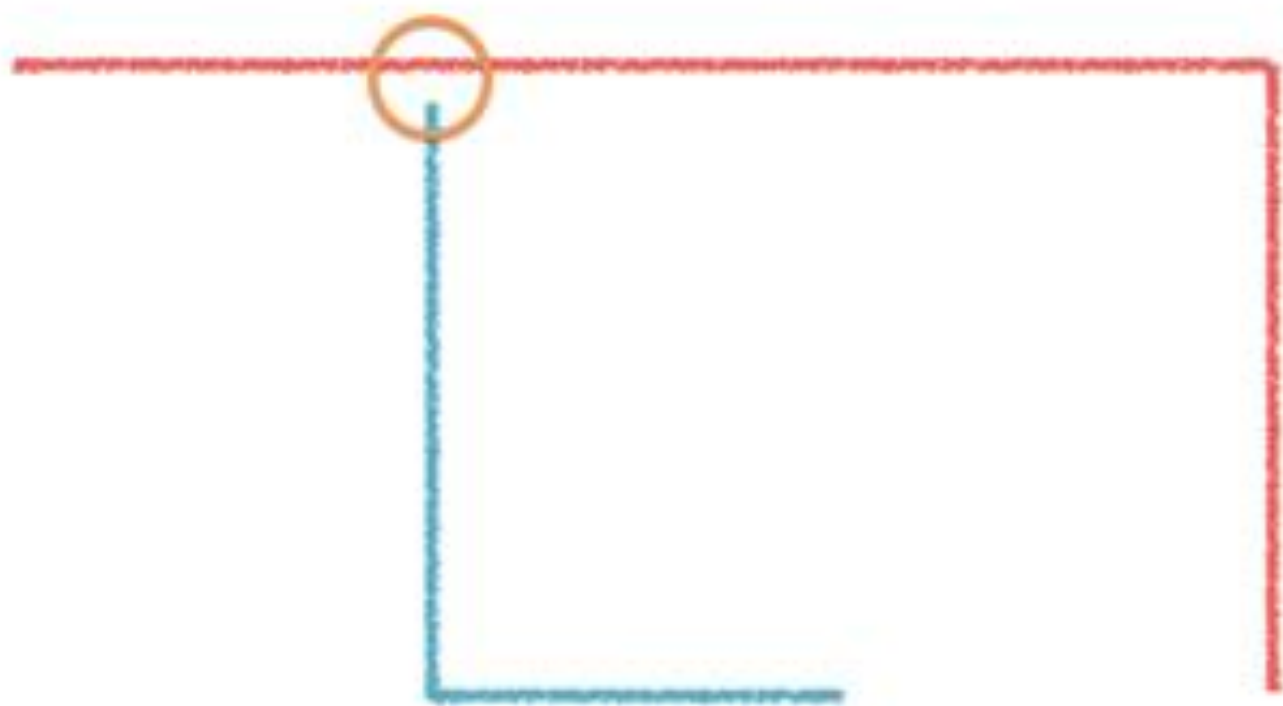
3 + 2 + 1 GdV

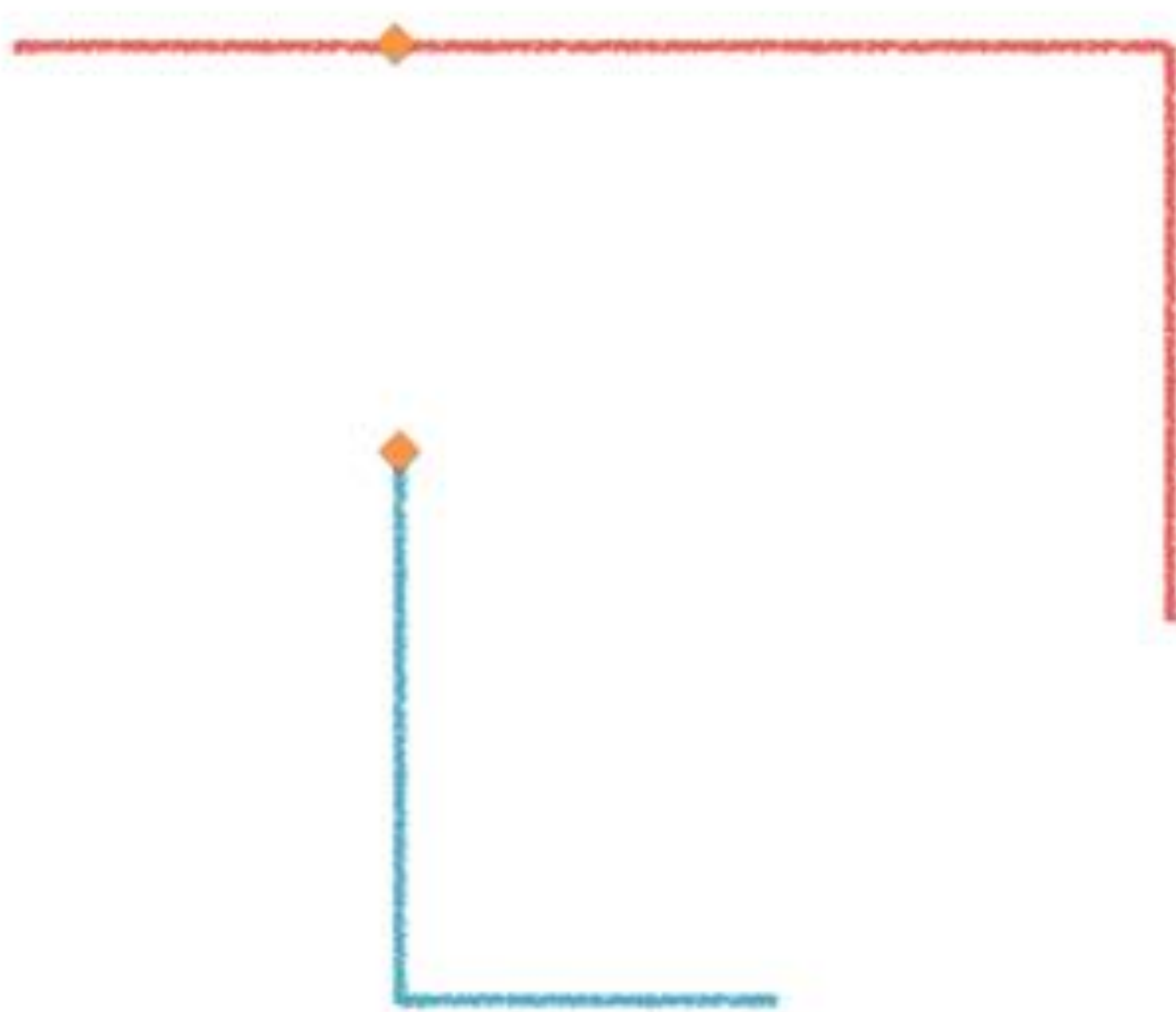


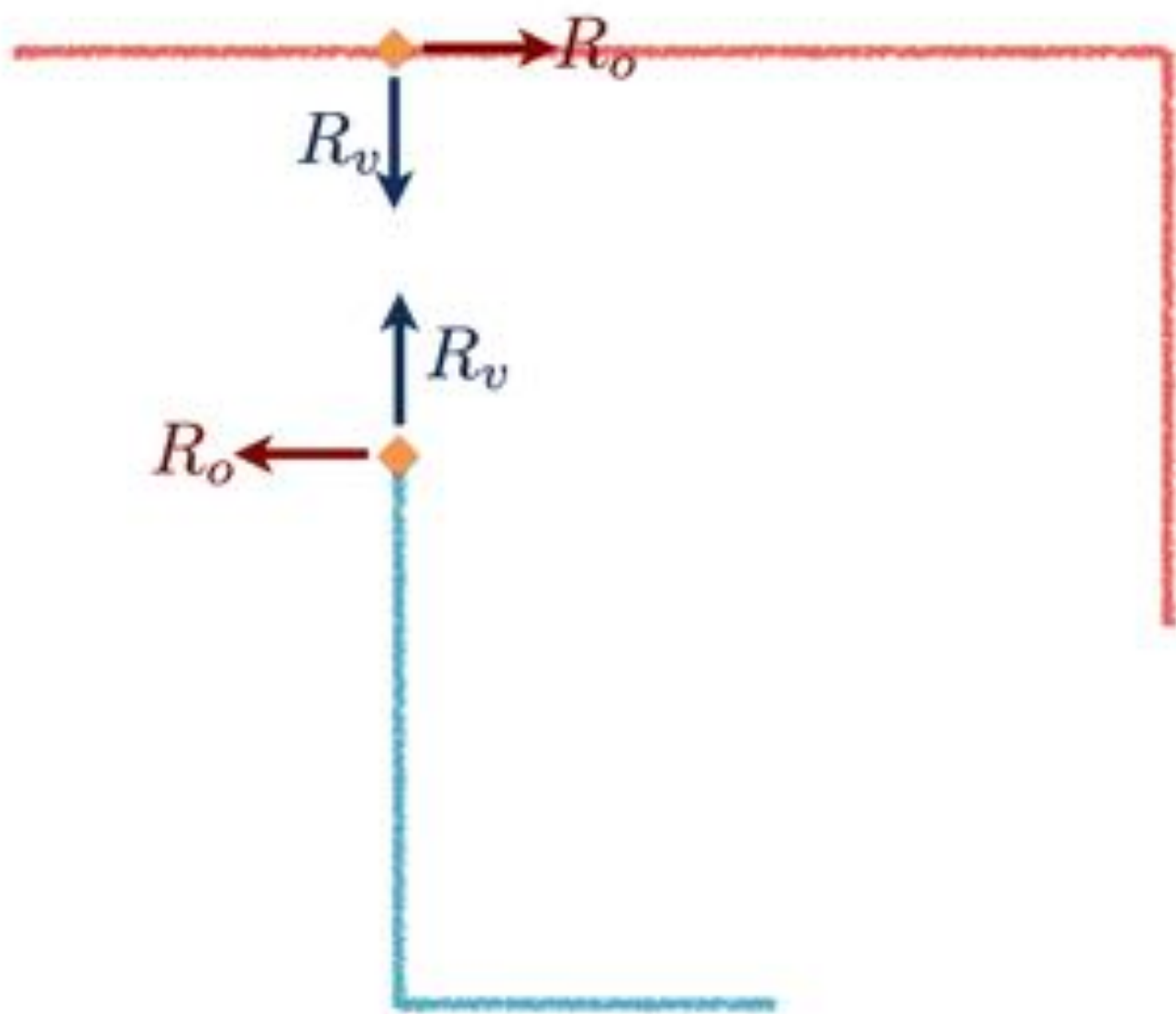
# Varianti "da esercizio"

3 + 2 + 1 GdV

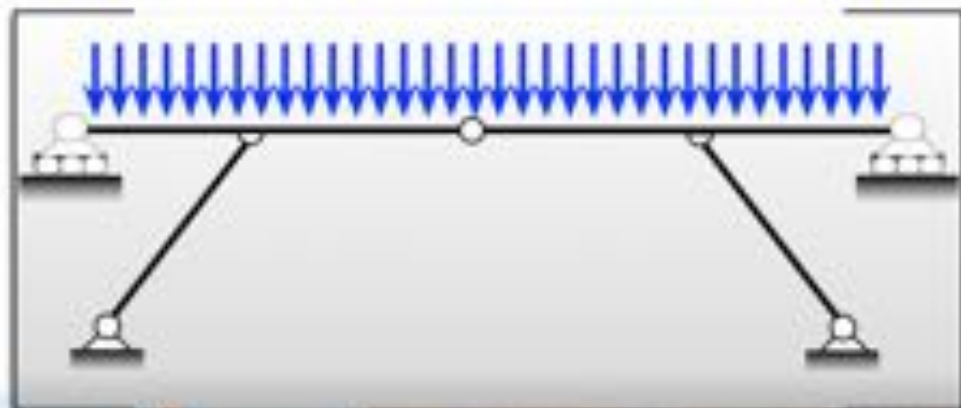








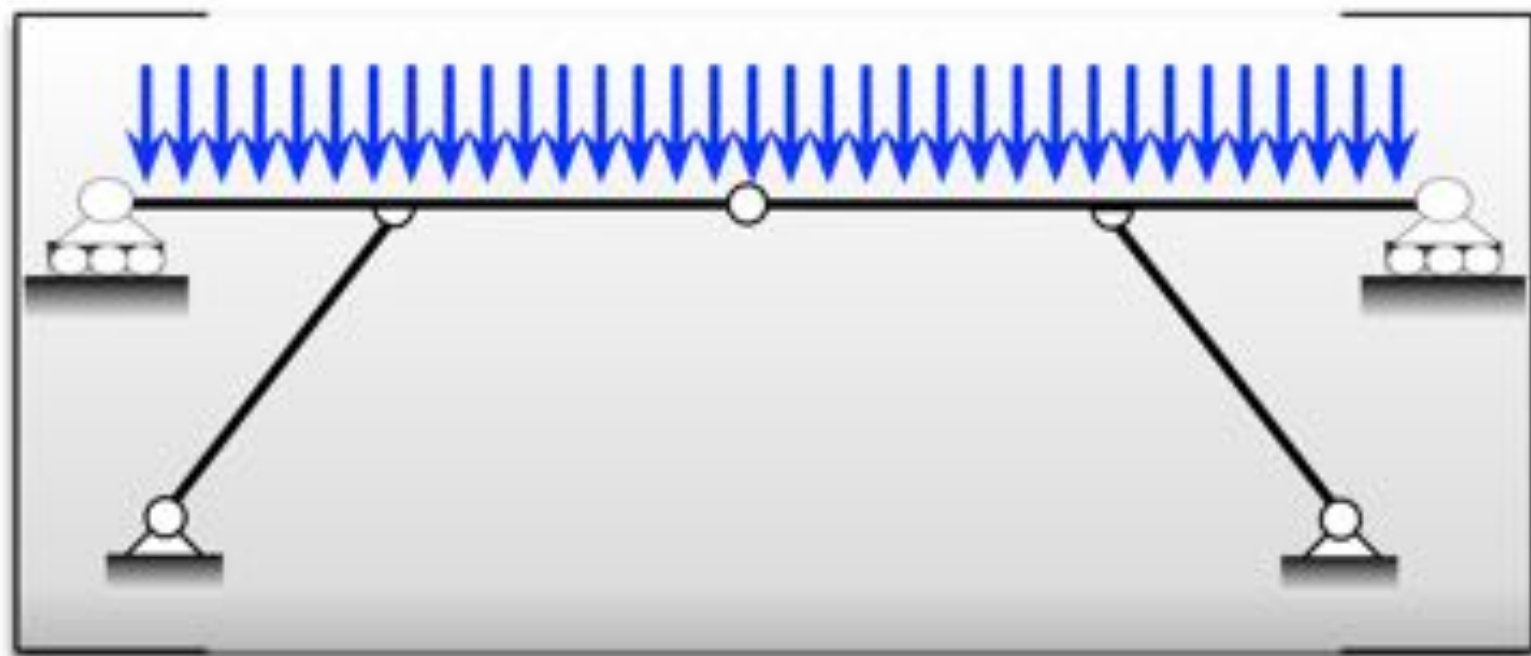




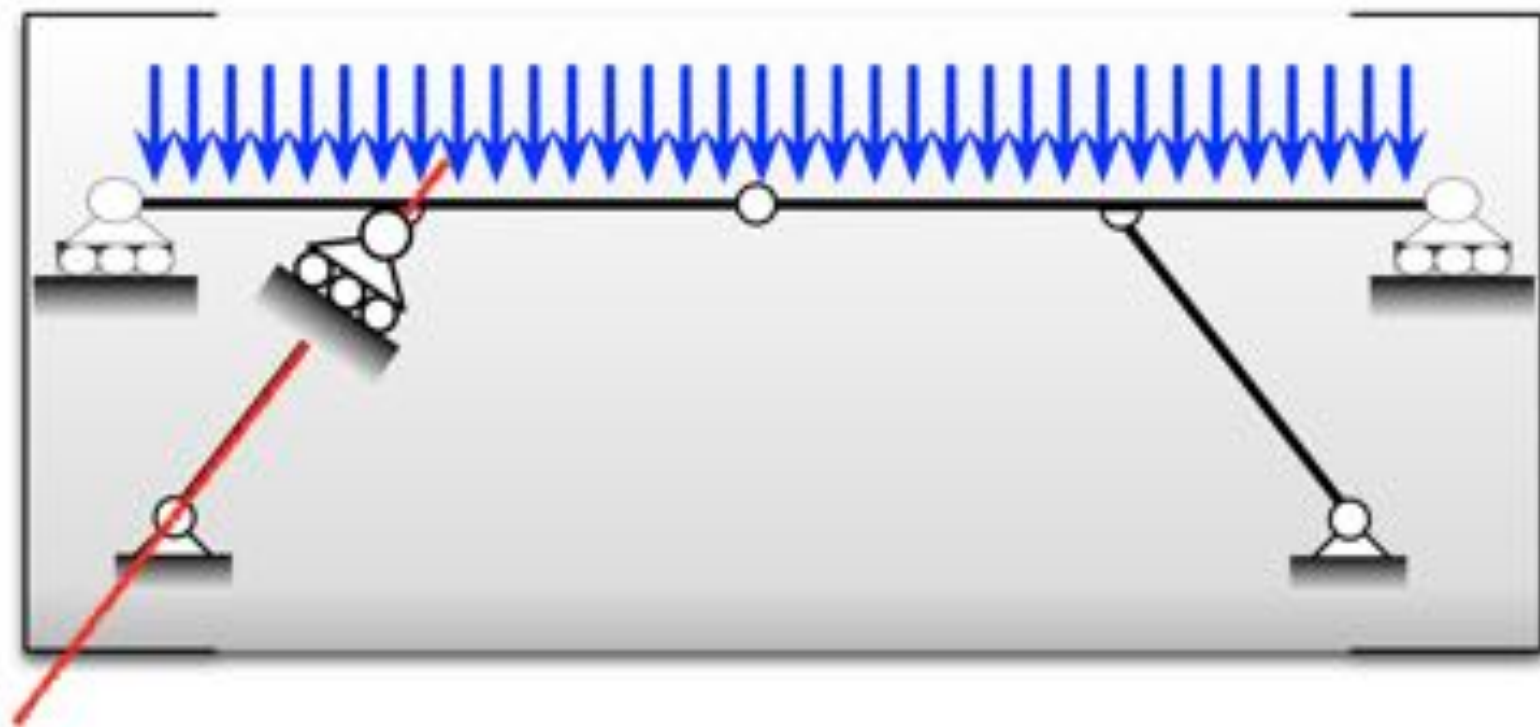
Arco "a tre  
cerniere"



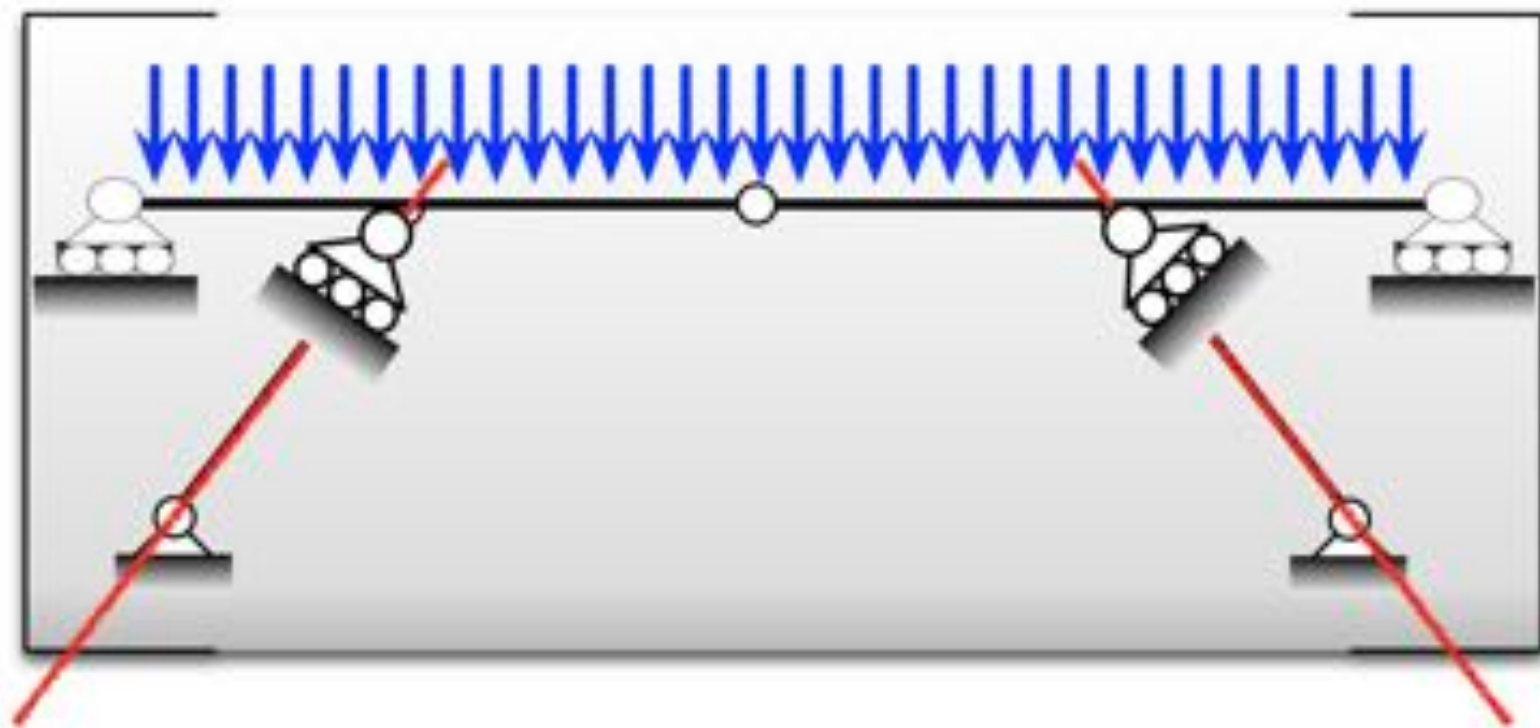
## Arco "a tre cerniere"



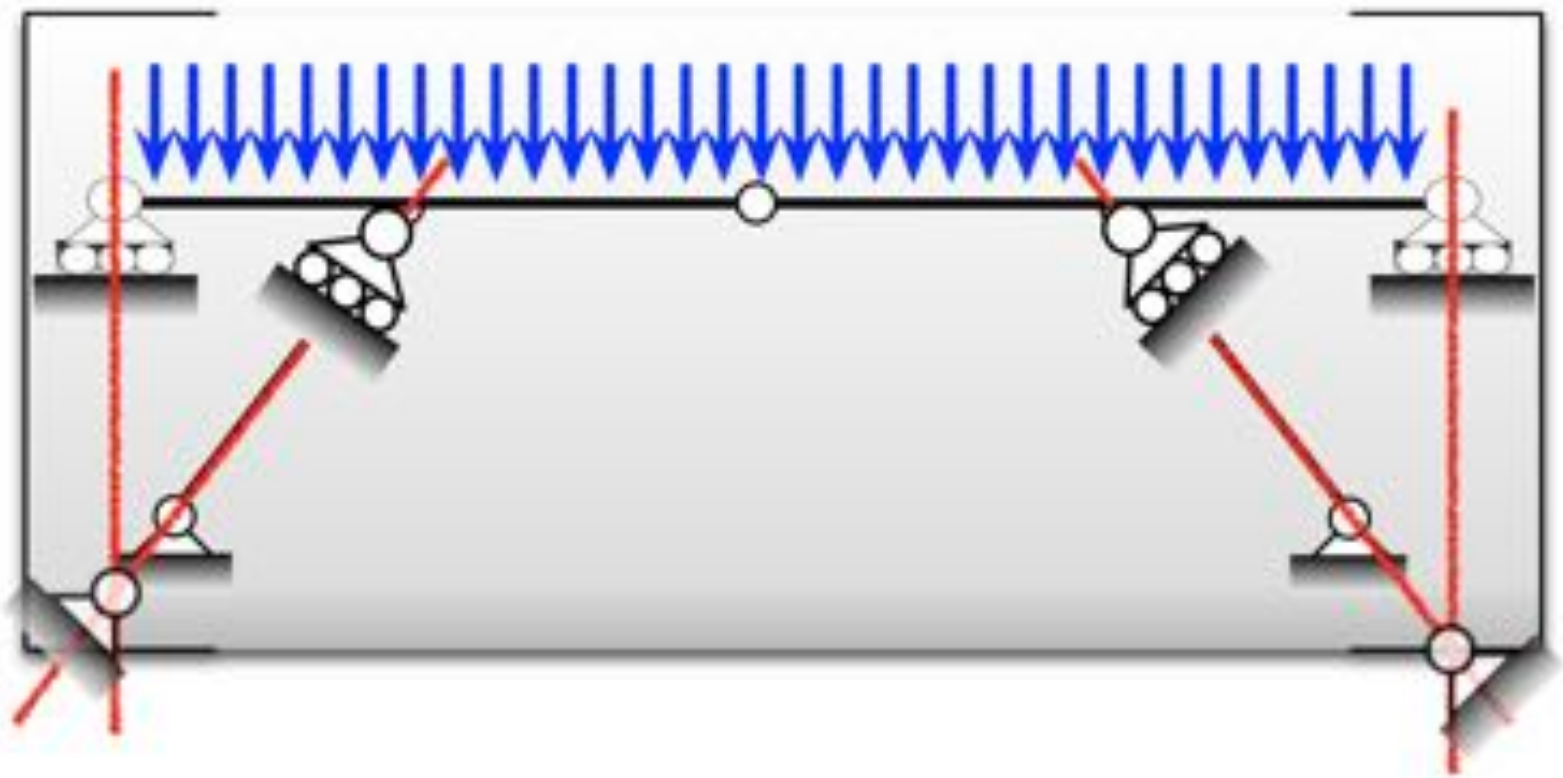
## Arco "a tre cerniere"



## Arco "a tre cerniere"

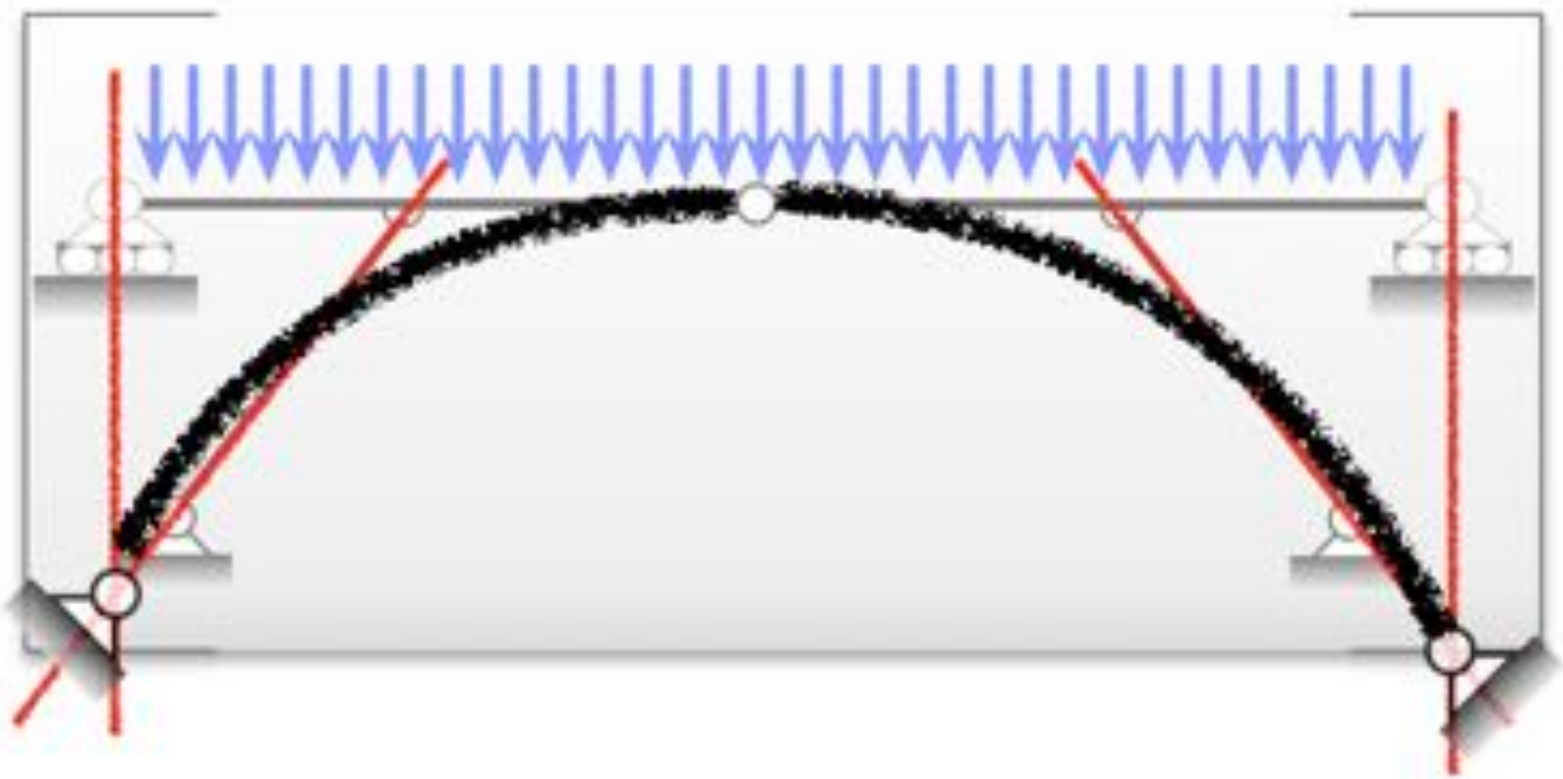


## Arco "a tre cerniere"





## Arco "a tre cerniere"

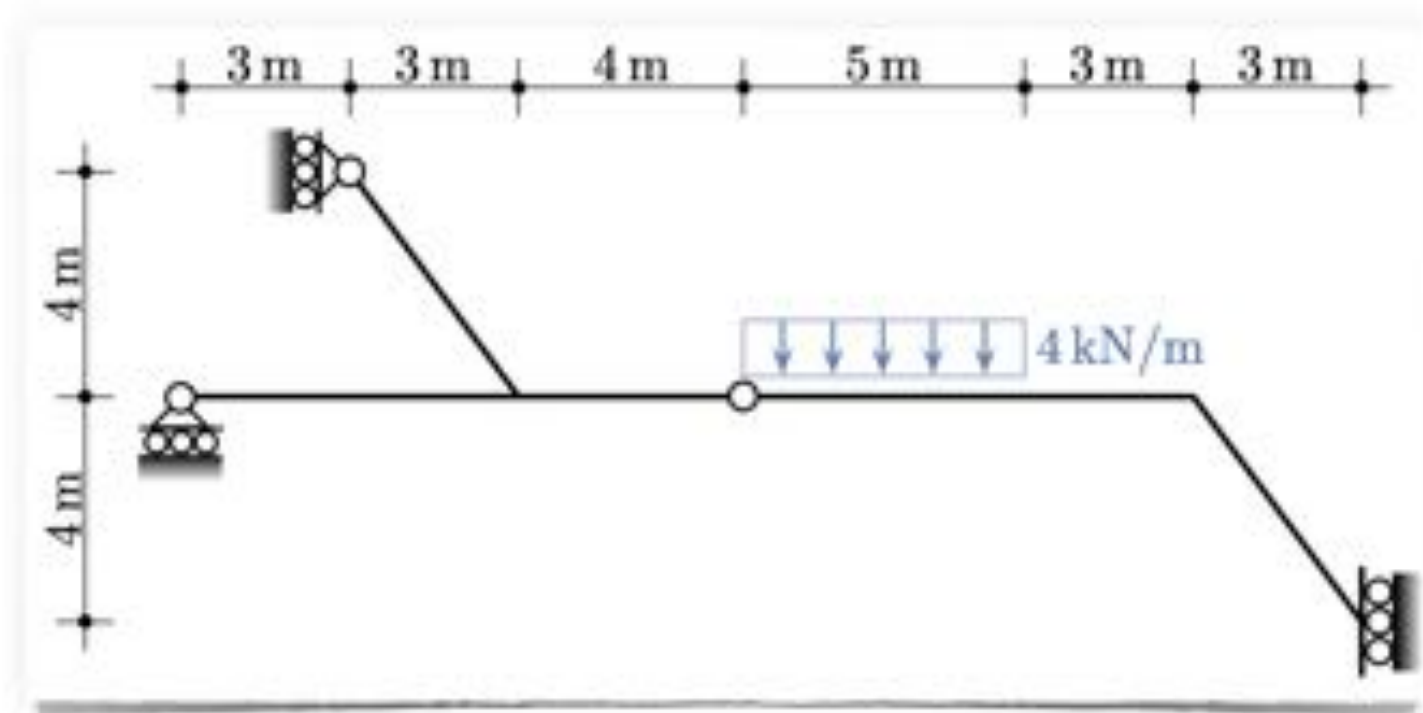


# attività extra

## “Adotta una struttura” ...

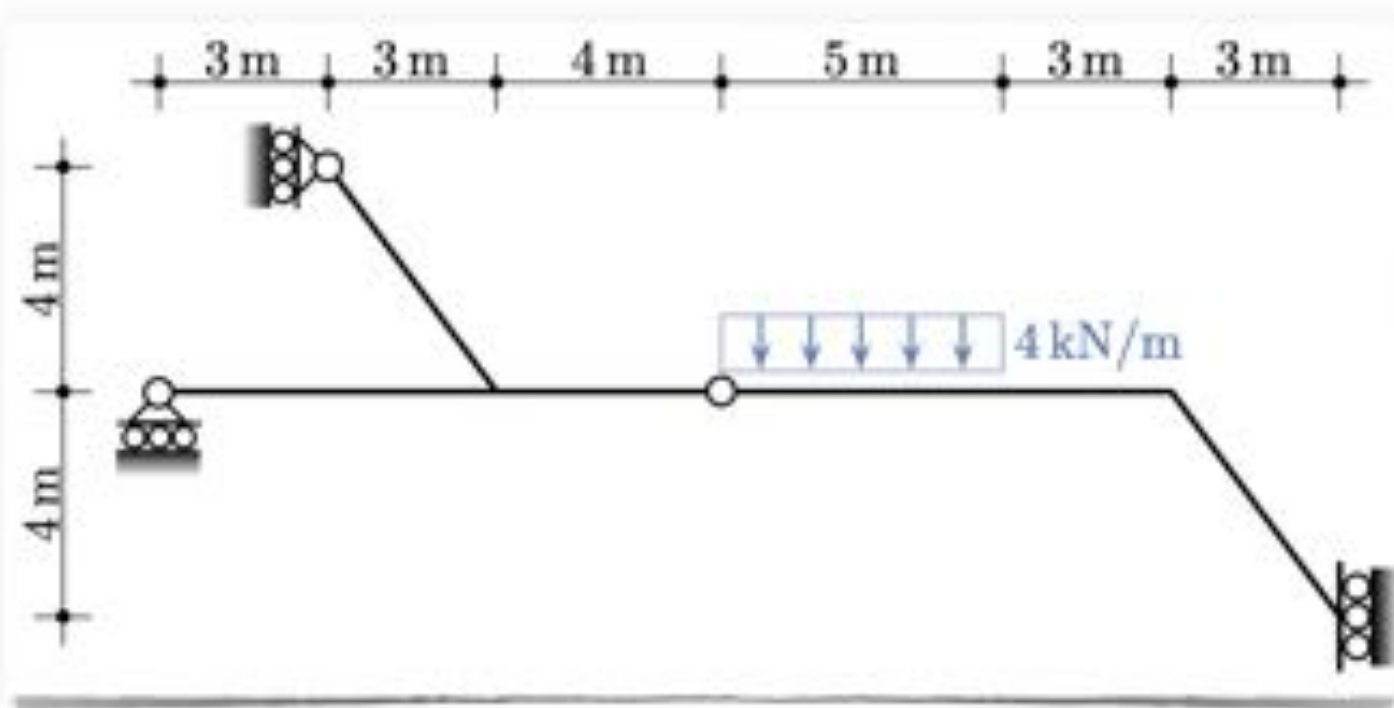
1. scegliere “**adottare**” una struttura **reale** per l'intera durata del corso
2. modellarla con **vincoli** e **tratti** lineari
3. **risolverla** con i metodi via via affrontati a lezione

## Metodo dei corpi liberi



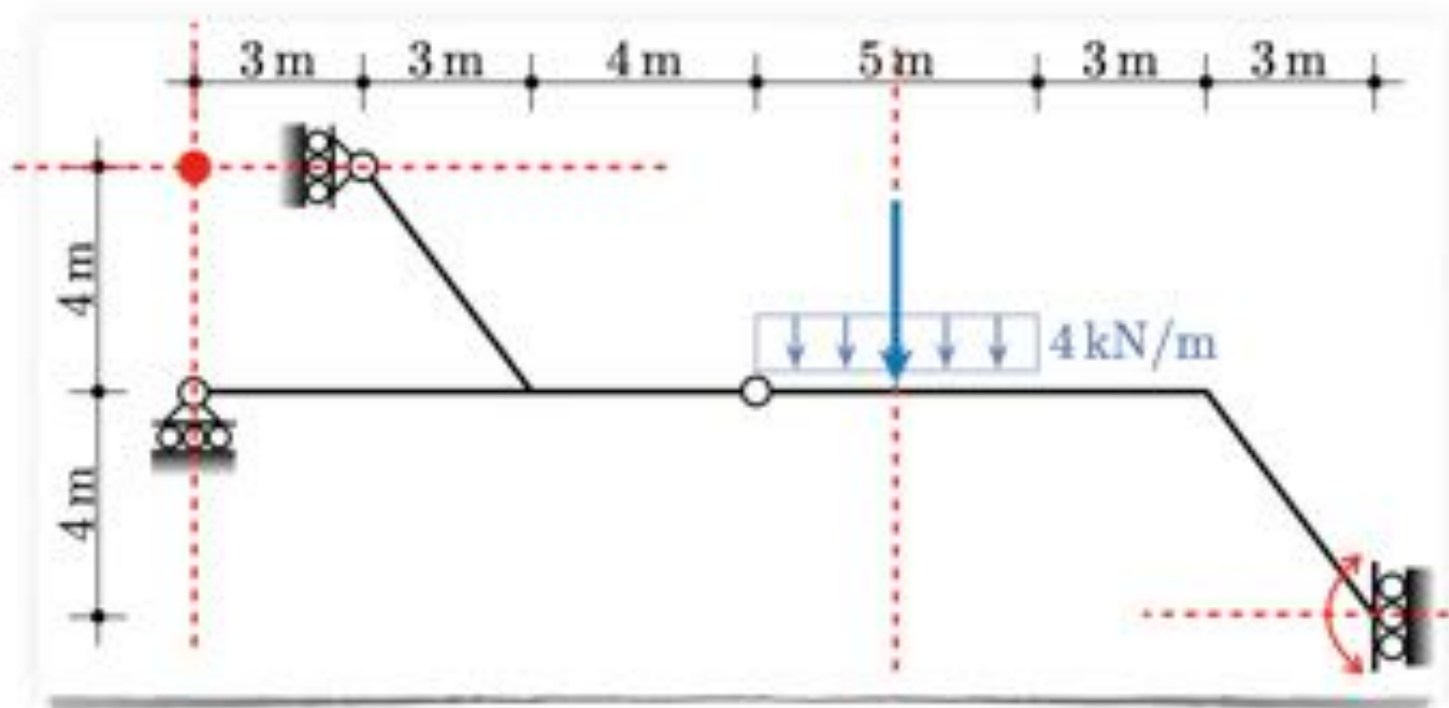
## Metodo dei corpi liberi

1. Passare in rassegna tutti gli equilibri possibili, globali e locali
2. Riconoscere possibili equilibri/schemi notevoli



## Metodo dei corpi liberi

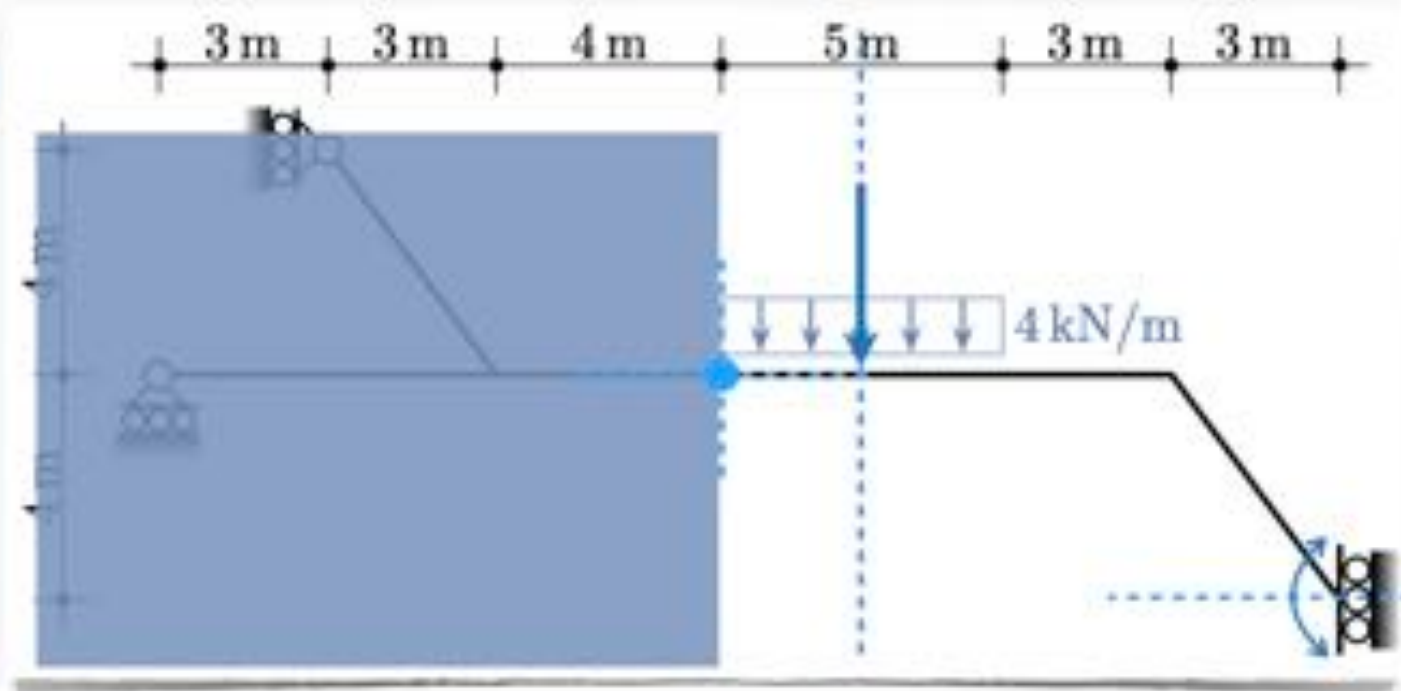
1. Passare in rassegna tutti gli equilibri possibili, **globali** e locali
2. Riconoscere possibili equilibri/  
schemi notevoli





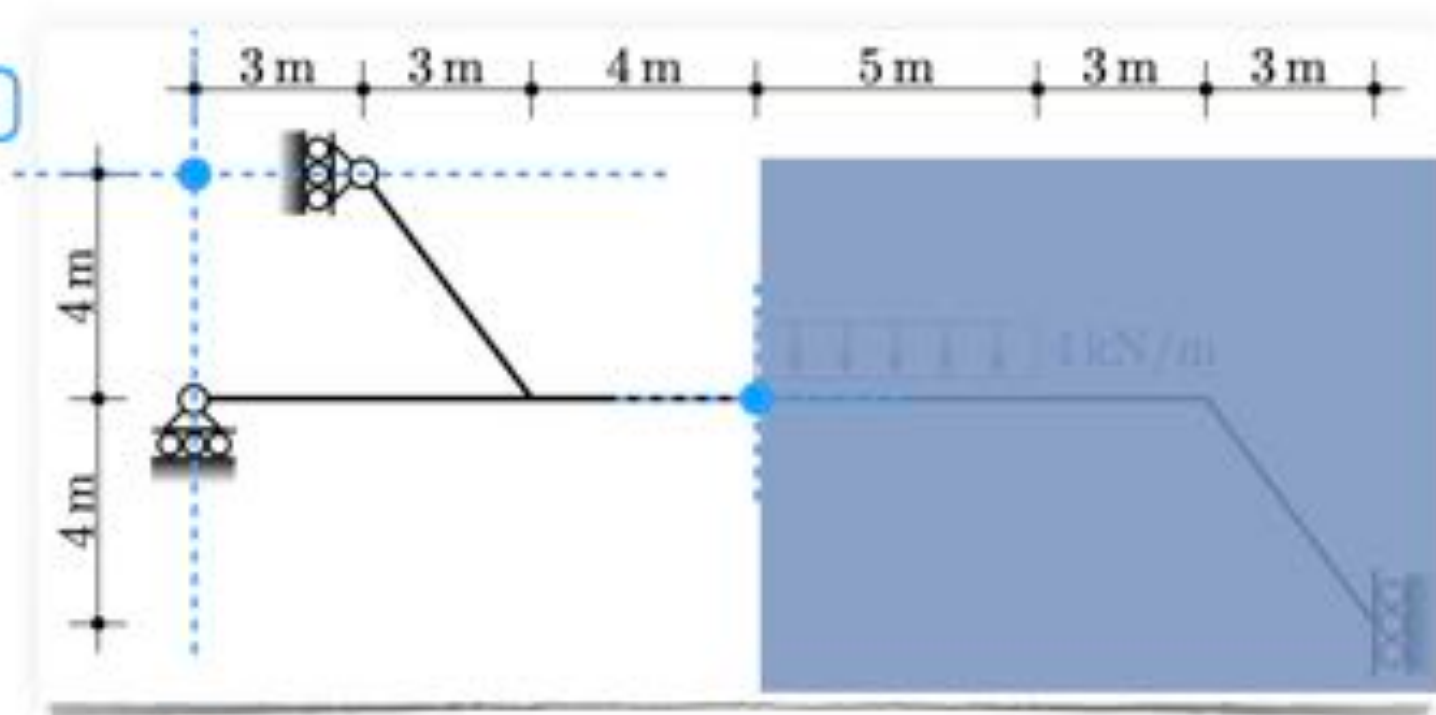
## Metodo dei corpi liberi

1. Passare in rassegna tutti gli equilibri possibili, globali e locali
2. Riconoscere possibili equilibri/schemi notevoli



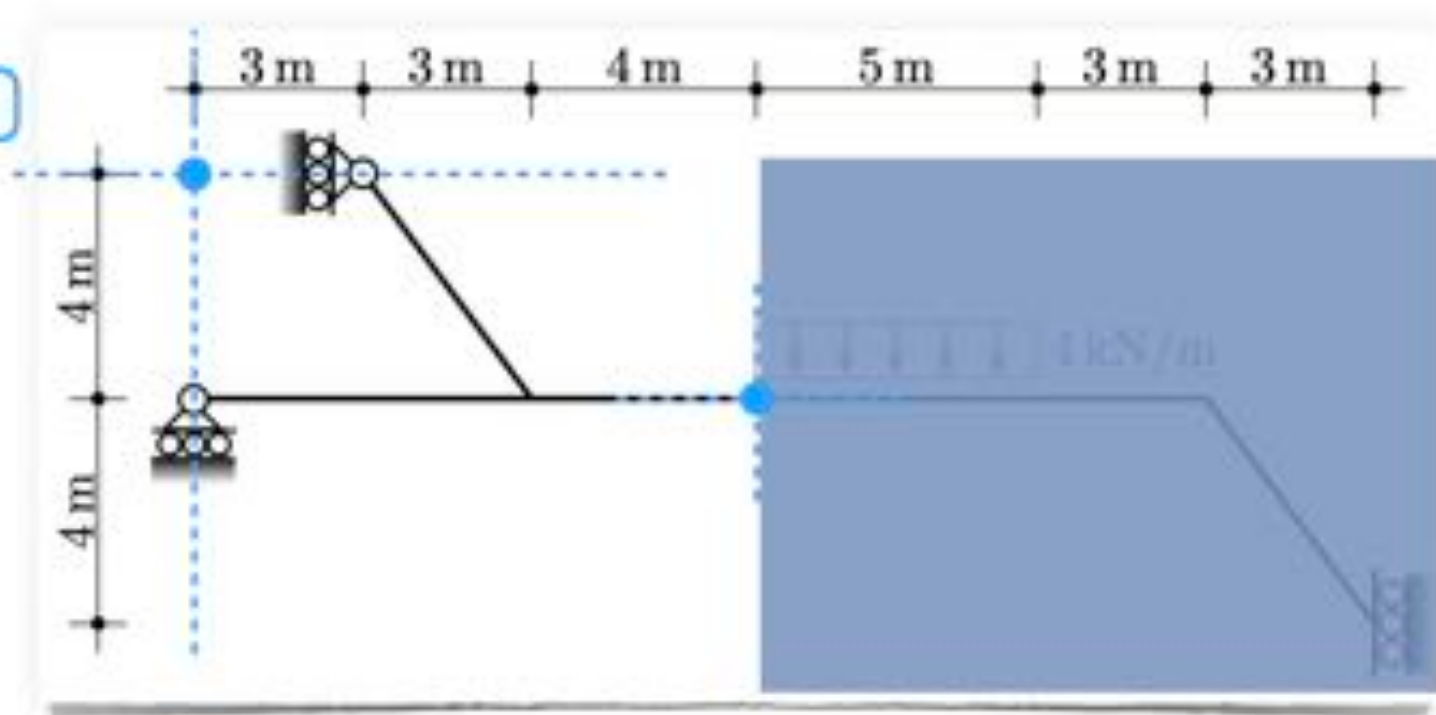
## Metodo dei corpi liberi

1. Passare in rassegna tutti gli equilibri possibili, globali e locali
2. Riconoscere possibili equilibri/schemi notevoli



## Metodo dei corpi liberi

1. Passare in rassegna tutti gli equilibri possibili, globali e locali
2. Riconoscere possibili equilibri/schemi notevoli
3. Iniziare a scrivere/risolvere l'equilibrio sullo schema più semplice



## Metodo dei corpi liberi

1. Passare in rassegna tutti gli equilibri possibili, globali e locali
2. Riconoscere possibili equilibri/ schemi notevoli
3. Iniziare a scrivere/risolvere l'equilibrio sullo schema più semplice
4. **In alternativa** scrivere (due) equilibri alla rotazione diversi nelle stesse (due) incognite

