

Università degli Studi “Roma Tre”

Facoltà di Architettura

Fondamenti di Meccanica delle Strutture

Appunti sul modello elastico lineare di trave

Giovanni Formica

Roma, 27 gennaio 2014

Sommarario

1	Trave di Timoshenko	4
1.1	Posizione del problema: forma differenziale	4
1.2	Soluzione alla Navier	6
1.3	Forma integrale	6
1.3.1	Dualità	7
1.3.2	Principio dei lavori virtuali	7
1.3.3	Dissipazione	8
2	Trave di Euler-Bernoulli	10
2.1	Integrazione della linea elastica	11
2.2	Alcuni esempi di trave	12
2.2.1	Trave doppiamente appoggiata	12
2.2.2	Trave doppiamente incastrata	13
2.2.3	Semi-telaio	14
3	Confronto tra modelli	16
3.1	Aspetti energetici del problema elastico-lineare	16
3.2	Confronto tra le descrizioni dinamiche	19
3.3	Confronto tra le descrizioni cinematiche	19
3.4	Soluzioni approssimate	20
3.5	Confronto analitico per alcuni esempi di trave	21
3.5.1	Trave doppiamente appoggiata	22
3.5.2	Trave doppiamente incastrata	23
3.5.3	Trave doppiamente incastrata con cedimento vincolare	23
3.6	Strutture iperstatiche	25
4	Distribuzione tensionale sulla sezione	26
4.1	Tensioni assiali	26
4.2	Tensioni tangenziali: trattazione approssimata di Jourawski	27
4.2.1	Alcune considerazioni sull'errore di compatibilità	30
4.2.2	Un esempio sulla valutazione dello stato tensionale	32
4.2.3	Generalizzazione dello stato tensionale di Jourawski	33
	Riferimenti bibliografici	35

Notazioni e Definizioni

$f[x]$ funzione f di x

$f'[x]$ derivata di f rispetto a x .

$$\text{Es.: } f[x] = x^n \quad \rightarrow \quad f'[x] = n x^{n-1}$$

\dot{q} derivata temporale della variabile q .

$\frac{\partial g[x, y]}{\partial x}$ derivata parziale di g rispetto a x .

$$\text{Es.: } g[x, y] = x^2 y \quad \rightarrow \quad \frac{\partial g[x, y]}{\partial x} = 2xy;$$

$\frac{\partial g[x, y]}{\partial y} = x^2$ è invece la derivata parziale rispetto a y .

$\int_a^b f[x]$ integrale tra a e b di $f[x]$ rispetto a x in dx .

$$\text{Es.: } f[x] = x^n \quad \rightarrow \quad \int_a^b f[x] dx = \frac{1}{n+1} \left[x^{n+1} \right]_a^b$$

\Rightarrow teorema fondamentale dell'analisi:

$$\left[f[x]g[x] \right]_a^b = \int_a^b f'[x]g[x] dx + \int_a^b f[x]g'[x] dx \quad \text{con} \quad \left[f[x]g[x] \right]_a^b := f[b]g[b] - f[a]g[a]$$

1 Trave di Timoshenko

1.1 Posizione del problema: forma differenziale

Il problema elastico lineare della trave si compone di tre gruppi di equazioni di campo

1. equazioni di equilibrio:

$$\begin{cases} N'[s] + p[s] = 0 \\ T'[s] + q[s] = 0 \\ M'[s] + \mu[s] + T[s] = 0 \end{cases} \quad (1a)$$

2. legami costitutivi:

$$\begin{cases} N[s] = EA\varepsilon[s] \\ T[s] = \beta EA\gamma[s] \\ M[s] = EJ\chi[s] \end{cases} \quad (1b)$$

3. condizioni di compatibilità, per piccoli spostamenti:

$$\begin{cases} \varepsilon[s] = u'[s] \\ \gamma[s] = v'[s] - \vartheta[s] \\ \chi[s] = \vartheta'[s] \end{cases} \quad (1c)$$

nei tre gruppi di variabili:

sollecitazioni (N , T , M),

deformazioni (ε , γ , χ) e

spostamenti rigidi della sezione (u , v , ϑ).

Si considerano anche

azioni distribuite (p , q , μ) come carichi esterni, e

azioni concentrate ($N[0]$, $T[0]$, $M[0]$) e ($N[\ell]$, $T[\ell]$, $M[\ell]$) agli estremi della trave.

Tutte le grandezze introdotte si possono esprimere come funzioni della posizione s della sezione sull'asse della trave, e sono schematicamente rappresentate nelle Figure 1, 2, 3 e 4 .

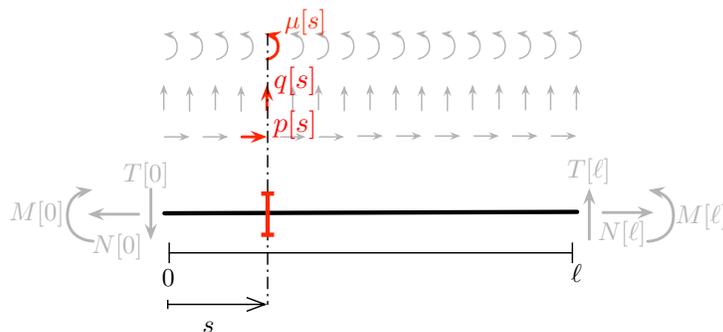


Figura 1: azioni esterne alla trave.

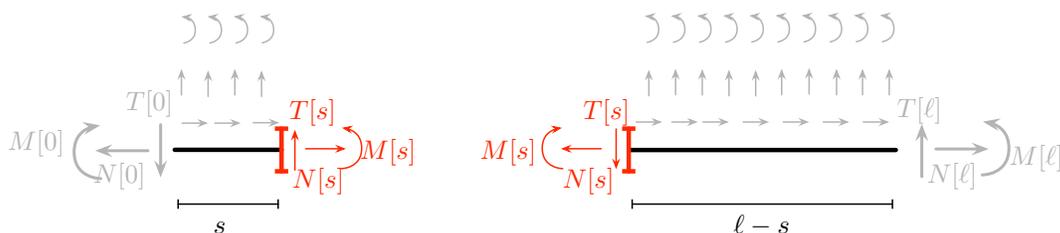


Figura 2: azioni interne alla trave.

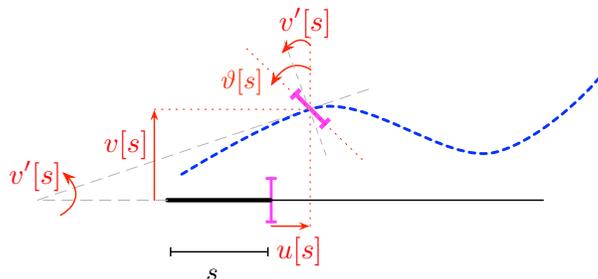


Figura 3: cinematica della trave in termini di spostamenti rigidi della sezione.

Nei legami costitutivi compaiono il modulo di Young e i moduli che tengono opportunamente conto (in base al tipo di deformazione) della forma della sezione. Il prodotto tra tali moduli che determina la proporzionalità tra sollecitazioni e deformazioni è un coefficiente di rigidezza. Se con β si indica un fattore che riduce opportunamente sia E sia A per avere un'appropriata rigidezza di taglio $G A^*$, il legame corrispondente legame costitutivo può essere scritto come

$$T[s] = G A^* \gamma[s] =: \beta(EA) \gamma[s];$$

infatti, G è il modulo di elasticità tangenziale che per buona parte dei materiali è una frazione di E , mentre A^* è detta area ridotta (a taglio), anch'essa frazione dell'area A della sezione.

I moduli E e G sono valori dipendenti dalla natura del materiale, come mostrato in Tabella 1. I moduli di

materiale	Young, E	tangenziale, G
acciaio	2 250	890
vetro	800	300
alluminio	775	290
calcestruzzo	300	125
legno	120	50
gomma	1.0	0.4

Tabella 1: alcuni valori dei moduli di elasticità (in ton/cm²).

forma della sezione, che compaiono nelle (1b), sono l'area della sezione (A) e il momento di inerzia (J) rispetto all'asse del momento M ; a questi si aggiunge la riduzione di A per il legame tra T e γ . Si noti che per una sezione rettangolare di dimensioni b per h , con flessione M secondo un asse ortogonale ad h , tali moduli valgono:

$$\begin{aligned} \text{sezione rettangolare : } A &= bh \\ J &= bh^3/12 \\ \beta(EA) &= \frac{5}{6}GA \end{aligned}$$

Pertanto, una trave a sezione rettangolare, ad esempio in acciaio, ha $G \approx E/2.5$ e quindi $\beta \approx 1/3$.

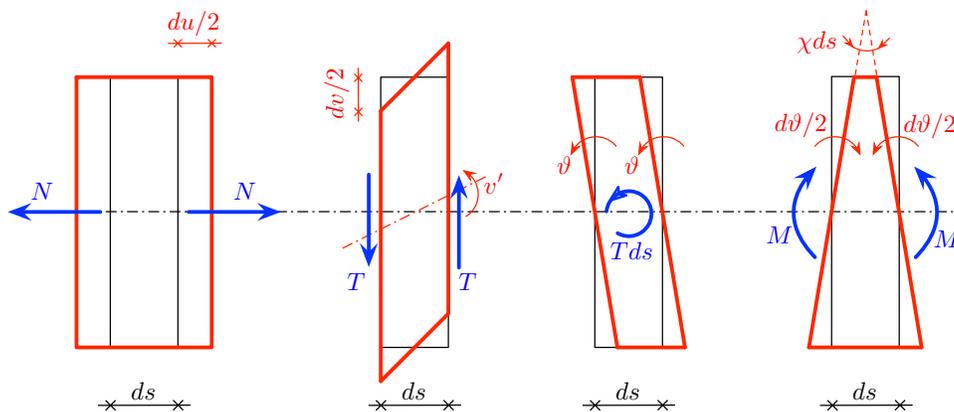


Figura 4: esempi di deformazioni/sollecitazioni in un conio di trave.

1.2 Soluzione alla Navier

Le condizioni di equilibrio (1a) possono essere riscritte in termini di sole variabili di spostamento della sezione. Occorre introdurre le espressioni delle misure di deformazione (1c) nei legami costitutivi (1b), cioè:

$$\begin{cases} N[s] = EAu'[s] \\ T[s] = GA^*(v'[s] - \vartheta[s]) \\ M[s] = EJ\vartheta'[s] \end{cases} \quad (2a)$$

Le espressioni così ottenute delle sollecitazioni vengono quindi introdotte nelle equazioni (1a). Prima di far ciò, le (1a) possono essere modificate in modo da disaccoppiare il legame tra M e T :

$$\begin{cases} N'[s] + p[s] = 0 \\ T'[s] + q[s] = 0 \\ M''[s] + \mu'[s] - q[s] = 0 \end{cases}$$

Pertanto, considerando per semplicità travi a rigidezza costante lungo s , cioè

$$(EA)' \equiv (GA^*)' \equiv (EJ)' = 0$$

l'equilibrio assume la forma

$$\begin{cases} EA u''[s] + p[s] = 0 \\ GA^*(v''[s] - \vartheta'[s]) + q[s] = 0 \\ EJ\vartheta'''[s] + \mu'[s] - q[s] = 0 \end{cases} \quad (2b)$$

Si noti che la soluzione nella variabile cinematica u è indipendente dalle altre due variabili v e ϑ . Le (2b) costituiscono un sistema di equazioni differenziali lineari.

1.3 Forma integrale

Il problema elastico-lineare definito fin qui, può essere anche formulato in termini integrali, introducendo opportune espressioni di potenza spesa dalle azioni dinamiche sulle quantità cinematiche. In particolare, le condizioni di equilibrio (1a) e compatibilità cinematica (1c) sono in legame di dualità determinato dal principio di bilancio (o di potenza nulla); i legami costitutivi rispondono a prescrizioni fornite dal principio di dissipazione.

Se $(\dot{u}, \dot{v}, \dot{\vartheta})$ e $(\dot{\varepsilon}, \dot{\gamma}, \dot{\chi})$ definiscono i campi cinematici di velocità, rispettivamente per le tre componenti di spostamento della sezione e le tre misure di deformazione, il principio di bilancio assume la forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_e - \mathcal{P}_i &= 0, \quad \text{con:} \\ \mathcal{P}_e &= \int_0^\ell \left\{ p[s]\dot{u}[s] + q[s]\dot{v}[s] + \mu[s]\dot{\vartheta}[s] \right\} \\ &\quad + \left[N[s]\dot{u}[s] + T[s]\dot{v}[s] + M[s]\dot{\vartheta}[s] \right]_0^\ell \\ \mathcal{P}_i &= \int_0^\ell \left\{ N[s]\dot{\varepsilon}[s] + T[s]\dot{\gamma}[s] + M[s]\dot{\chi}[s] \right\} \end{aligned} \quad (3)$$

La dualità si esplica nel senso che tramite l'uguaglianza delle potenze esterne e interne si dimostra che da un campo di velocità compatibile con la (1c) si ricava un campo di sollecitazione equilibrato (che soddisfa la (1a)), e viceversa. La dimostrazione richiede l'uso del teorema fondamentale dell'analisi.

1.3.1 Dualità

Si dimostra la dualità solo per la parte relativa alle sollecitazioni/deformazioni assiali. Per le restanti parti si opera analogamente. È sufficiente, in particolare, riscrivere il termine di potenza esterna esercitata dalle azioni sugli estremi della trave come:

$$\left[N[s]\dot{u}[s] \right]_0^\ell = \int_0^\ell \left(N[s]\dot{u}[s] \right)' = \int_0^\ell \left\{ N'[s]\dot{u}[s] + N[s]\dot{u}'[s] \right\}$$

Il bilancio tra potenze esterna e interna assume quindi la forma

$$\begin{aligned} \int_0^\ell \left\{ N[s]\dot{\varepsilon}[s] \right\} &= \int_0^\ell \left\{ p[s]\dot{u}[s] \right\} + \left[N[s]\dot{u}[s] \right]_0^\ell \\ &\equiv \int_0^\ell \left\{ p[s]\dot{u}[s] + N'[s]\dot{u}[s] + N[s]\dot{u}'[s] \right\} \end{aligned}$$

ovvero

$$\int_0^\ell N[s](\dot{\varepsilon}[s] - \dot{u}'[s]) = \int_0^\ell (p[s] + N'[s])\dot{u}[s] \quad (4)$$

Questa espressione, pertanto, consente una duplice lettura: assumendo che un generico campo $\dot{u}[s]$ soddisfi la compatibilità $\dot{\varepsilon}[s] = \dot{u}'[s]$, l'uguaglianza di bilancio riscritta come la (4) fornisce l'equazione di equilibrio $N'[s] + p[s] = 0$; assumendo invece che un generico campo $N[s]$ soddisfi l'equilibrio $N'[s] + p[s] = 0$, la (4) fornisce la compatibilità $\dot{\varepsilon}[s] = \dot{u}'[s]$.

1.3.2 Principio dei lavori virtuali

Il principio di bilancio vale anche per campi di sollecitazione o di deformazione virtuali; in questo caso, si parla di lavoro virtuale esterno e lavoro virtuale interno: la (3) si legge altresì

$$\check{\mathcal{L}}_e - \check{\mathcal{L}}_i = 0 \quad (5)$$

Si parlerà di principio degli spostamenti virtuali, asserendo che, dato un generico campo cinematico, di spostamenti virtuali $(\check{u}, \check{v}, \check{\vartheta})$ compatibile con le deformazioni $(\check{\varepsilon}, \check{\gamma}, \check{\chi})$, l'equazione dei lavori virtuali (5) così riscritta

$$\begin{aligned} \int_0^\ell \left\{ p[s]\check{u}[s] + q[s]\check{v}[s] + \mu[s]\check{\vartheta}[s] \right\} + \left[N[s]\check{u}[s] + T[s]\check{v}[s] + M[s]\check{\vartheta}[s] \right]_0^\ell \\ - \int_0^\ell \left\{ N[s]\check{\varepsilon}[s] + T[s]\check{\gamma}[s] + M[s]\check{\chi}[s] \right\} = 0, \quad \forall (\check{u}, \check{v}, \check{\vartheta}) \text{ compatibile} \end{aligned} \quad (6)$$

definisce una condizione di equilibrio tra carichi agenti e sollecitazioni (reali).

In modo duale, si parlerà di principio delle forze virtuali, asserendo che, dato un generico campo dinamico, di sollecitazioni virtuali $(\check{N}, \check{T}, \check{M})$ equilibrato con i carichi virtuali $(\check{p}, \check{q}, \check{\mu})$, l'equazione dei lavori virtuali (5) così riscritta

$$\int_0^\ell \left\{ \check{p}[s]u[s] + \check{q}[s]v[s] + \check{\mu}[s]\vartheta[s] \right\} + \left[\check{N}[s]u[s] + \check{T}[s]v[s] + \check{M}[s]\vartheta[s] \right]_0^\ell - \int_0^\ell \left\{ \check{N}[s]\varepsilon[s] + \check{T}[s]\gamma[s] + \check{M}[s]\chi[s] \right\} = 0, \quad \forall (\check{N}, \check{T}, \check{M}) \text{ equilibrato} \quad (7)$$

definisce una condizione di compatibilità tra spostamenti e deformazioni (reali).

1.3.3 Dissipazione

La definizione del principio di dissipazione che si presenta come la disuguaglianza

$$\mathcal{P}_i - \dot{\phi} \geq 0 \quad (8a)$$

necessita l'introduzione dell'energia libera ϕ . L'energia libera si ottiene valutando l'energia definita su una sezione a seguito di una generica deformazione. In Figura 5, si riportano i casi di deformazione assiale e flessionale. In tali casi, ogni fibra di materiale orientata parallelamente a s in presenza di ε e χ subisce un'estensione o un accorciamento (percentuale) η . Se $E\eta$ è la tensione associata, cioè la forza specifica agente sulla singola fibra distante y da s , il lavoro prodotto su ciascuna fibra è

$$\frac{1}{2}(E\varepsilon^2 + E\chi^2 y^2)$$

Integrando quindi su tutte le fibre di una sezione, si ha l'energia di deformazione rilasciata su una generica sezione:

$$\frac{1}{2}(EA\varepsilon^2 + EJ\chi^2)$$

in cui si è introdotto il momento di inerzia $J = \int_A y^2$ rispetto all'asse della sezione ortogonale a y .

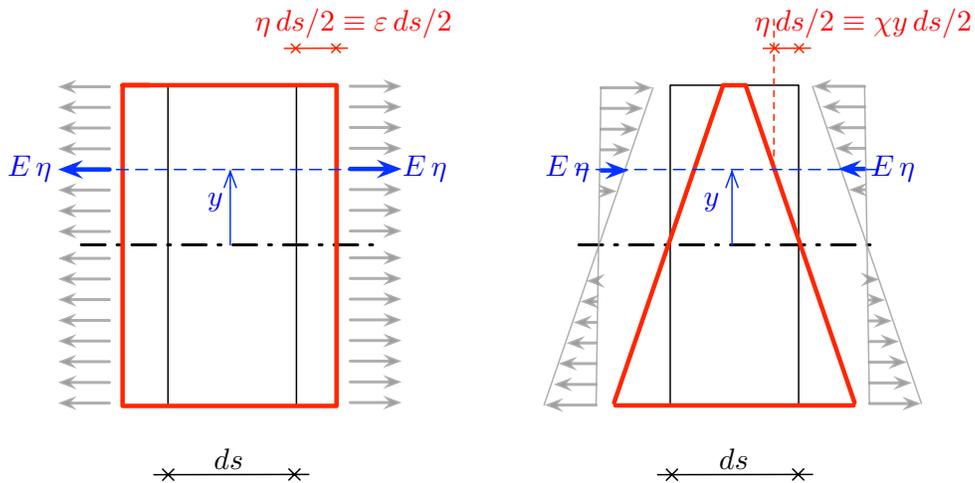


Figura 5: deformazioni/tensioni di fibre longitudinali.

Più complicata è l'espressione dell'energia libera in funzione della deformazione tagliante. Per questo si assumerà un contributo che come grandezza fisica assuma le sembianze di quello puramente l'assiale, a meno di un fattore correttivo β , cioè $\beta EA \gamma^2[s] = GA^* \gamma^2[s]$.

L'energia libera (o energia di deformazione) assume pertanto la forma:

$$\phi = \frac{1}{2} \int_0^\ell \{EA \varepsilon^2[s] + \beta EA \gamma^2[s] + EJ \chi^2[s]\} \quad (8b)$$

La sua derivata temporale risulta

$$\dot{\phi} = \int_0^\ell \{EA \varepsilon[s] \dot{\varepsilon}[s] + \beta EA \gamma[s] \dot{\gamma}[s] + EJ \chi[s] \dot{\chi}[s]\} \quad (8c)$$

Assumendo assenza di dissipazione ($\mathcal{P}_i - \dot{\phi} = 0$), si ricavano quindi i legami costitutivi (1b), dovendo il principio valere per ogni velocità di deformazione ($\dot{\varepsilon}$, $\dot{\gamma}$, $\dot{\chi}$). In questo caso la (8b) si può anche esprimere come

$$\phi = \frac{1}{2} \int_0^\ell \left\{ \frac{N^2[s]}{EA} + \frac{T^2[s]}{\beta EA} + \frac{M^2[s]}{EJ} \right\} \quad (8d)$$

Si noti infine che, a differenza del principio di bilancio, il principio di dissipazione - per costruzione - non può che riferirsi a grandezze (e velocità relative) reali, in quanto consente di definire le condizioni costitutive, specifiche del materiale e della forma strutturale, in termini di rigidità ed eventualmente di resistenza.

2 Trave di Euler-Bernoulli

Il modello di trave di Euler-Bernoulli si ricava da quello di Timoshenko assumendo trascurabile il contributo energetico associato al taglio $GA^* \gamma^2[s] = \beta EA \gamma^2[s]$ (ovvero $T^2[s]/GA^* = T^2[s]/\beta EA$). Essendo l'energia associata allo sforzo assiale indipendente da quella associata al taglio e al momento, l'errore di approssimazione che si commette nel caso di una trave di Euler-Bernoulli è quantificabile come rapporto

$$\frac{T^2/GA^*}{M^2/EJ}$$

Se si fa un conto approssimativo (per ordini di grandezza), è lecito porre $M \approx T\ell$, $\beta \approx 1$ e $J \approx A^2$. Pertanto il precedente rapporto energetico

$$\frac{T^2/GA^*}{M^2/EJ} = \frac{T^2/\beta EA}{M^2/EJ} \approx \frac{T^2/EA}{T^2\ell^2/EA^2} \equiv \frac{A}{\ell^2}$$

risulta modesto ($\ll 1$) per travi snelle, cioè per quelle travi con $A \ll \ell^2$.

Il problema elastico lineare della trave (1) può quindi essere ridotto, introducendo le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} \gamma \rightarrow 0 \\ \beta \rightarrow \infty \end{cases} \Rightarrow v' \rightarrow \vartheta \quad (9)$$

le quali appunto attestano che è nullo il contributo energetico di deformazione associato alle grandezze di taglio, cioè:

$$\begin{cases} \gamma \rightarrow 0 \\ \beta \rightarrow \infty \end{cases} \Rightarrow \beta EA \gamma^2[s] \rightarrow 0, \quad T^2[s]/\beta EA \rightarrow 0$$

L'assunzione di trave di Euler-Bernoulli equivale a introdurre un vincolo cinematico, interno al corpo. Da un punto di vista analitico, il sistema di equazioni (1) perde un'equazione costitutiva ($T[s] = \beta EA \gamma[s]$) e una variabile (γ).

Questa ipotesi porta alla seguente scrittura delle equazioni (2b):

$$\begin{cases} EAu''[s] + p[s] = 0 \\ EJv''''[s] + \mu'[s] - q[s] = 0 \end{cases} \quad (10)$$

Le espressioni che definiscono i due principi di potenza si riscrivono quindi:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_e - \mathcal{P}_i &= 0 \\ \mathcal{P}_i - \dot{\phi} &\geq 0, \\ \text{con:} \\ \mathcal{P}_e &= \int_0^\ell \left\{ p[s]\dot{u}[s] + q[s]\dot{v}[s] + \mu[s]\dot{\vartheta}[s] \right\} + \left[N[s]\dot{u}[s] + T[s]\dot{v}[s] + M[s]\dot{\vartheta}[s] \right]_0^\ell \\ \mathcal{P}_i &= \int_0^\ell \left\{ N[s]\dot{\epsilon}[s] + M[s]\dot{\chi}[s] \right\} \\ \phi &= \frac{1}{2} \int_0^\ell \left\{ EA \epsilon^2[s] + EJ \chi^2[s] \right\} \equiv \frac{1}{2} \int_0^\ell \left\{ \frac{N^2[s]}{EA} + \frac{M^2[s]}{EJ} \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

2.1 Integrazione della linea elastica

Se i carichi distribuiti (p , q e μ) sono funzioni polinomiali di s , le (10) sono equazioni differenziali di tipo lineare, nel senso che gli ordini via via più bassi di derivazione di u e v costituiscono altrettante equazioni differenziali lineari. Infatti, tramite le (2) e le (9), le equazioni (10) sono accompagnate dalle altre equazioni (scritte con ordini inferiori di derivazione) nel modo seguente:

$$EAu''[s] + p[s] = 0 \quad (12a)$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ N = EAu'[s], \quad (\varepsilon[s] = u'[s]) \end{array} \quad (12b)$$

$$EJv''''[s] - q[s] + \mu'[s] = 0 \quad (12c)$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ T[s] = -EJv'''[s] - \mu[s] \end{array} \quad (12d)$$

$$M[s] = EJv''[s], \quad (\chi[s] = v''[s]) \quad (12e)$$

$$\vartheta[s] = v'[s] \quad (12f)$$

In particolare, la soluzione $v[s]$ assume la forma generica

$$v[s] = c_0 + c_1s + c_2s^2 + c_3s^3 + c_4s^4 + \dots$$

da particolarizzare tramite le costanti c_0, c_1, \dots . Tali costanti sono funzione di condizioni diverse. Si sviluppi la soluzione in termini delle derivate ai vari ordini che compaiono nel problema, cioè

$$\begin{array}{rcl} v[s] & = & c_0 + c_1s + c_2s^2 + c_3s^3 + c_4s^4 + \dots \\ v'[s] & = & c_1 + 2c_2s + 3c_3s^2 + 4c_4s^3 + \dots \\ v''[s] & = & 2c_2 + 6c_3s + 12c_4s^2 + \dots \\ v'''[s] & = & 6c_3 + 24c_4s + \dots \\ v''''[s] & = & 24c_4 + \dots \end{array} \quad (13)$$

Da queste si vede che

- per la (12c), la costante c_4 dipende unicamente dal valore costante di $q + \mu'$: in particolare, per un carico trasversale costante (di valore $-F/l$) e coppie distribuite costanti ($\mu' = 0$), si ha che $c_4 = \frac{F/l}{24EJ}$. Le costanti agli ordini superiore al quarto dipendono dalla forma di $q + \mu'$: per esempio c_5 sarà pari al coefficiente della parte lineare di q e della parte costante di μ , e così via.
- Per le (12d), (12e), (12f), le restanti costanti di ordine inferiore a 4, in assenza di μ , non dipendendo dai carichi applicati, e non possono quindi che essere determinate dalle condizioni di vincolo agli estremi della trave. Infatti,
 - c_0 e c_1 sono la parte costante rispettivamente di v e di ϑ , alla quale corrisponde quindi un atto di moto rigido trasversale in assenza di carichi e sollecitazioni, che come noto dipende dai vincoli di estremità della trave;
 - c_2 dipende dal valore costante di M , che quindi si ricava dai valori di estremità del momento stesso: per M costante (p.e., $M[s] = \bar{M}$), si ha T nullo, e quindi dalla (12e) $c_2 = \frac{\bar{M}}{2EJ}$ e $c_3 = 0$;
 - analogamente, c_3 si ricava per un taglio costante (p.e., $T[s] = \bar{T}$) dalla (12d) $c_3 = -\frac{\bar{T}}{6EJ}$; in questo caso, non può che essere $M[s] = M[0] - \bar{T}s$ e quindi risulta anche $c_2 = \frac{M[0]}{2EJ}$.

Analogamente, la soluzione $u[s]$ ha la forma generica

$$u[s] = d_0 + d_1s + d_2s^2 + \dots$$

in cui la costante d_2 assume nei riguardi di $p[s]$ lo stesso significato della c_4 nei riguardi di $q + \mu'$.

2.2 Alcuni esempi di trave

Si ricorda che in presenza di un carico costante i coefficienti dei polinomi (13) maggiori del 4° sono univocamente nulli. Negli esempi che seguono si omette il calcolo delle grandezze assiali u e N , che in particolare si verifica essere identicamente nulle.

2.2.1 Trave doppiamente appoggiata

Si consideri l'esempio rappresentato in Figura 6.

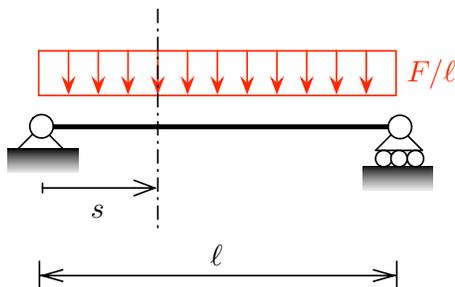


Figura 6: trave doppiamente appoggiata.

Per tale esempio si possono quindi porre le seguenti condizioni sui coefficienti dei polinomi (13):

$$c_4 = -\frac{F/\ell}{24 EJ}$$

$$c_0 = 0$$

$$c_1 = \vartheta[0]$$

$$c_2 = 0$$

$$c_3 = -\frac{T[0]}{6 EJ}$$

Se $\vartheta[0]$ e $T[0]$ sono noti, si ha direttamente la soluzione cercata. Altrimenti, si possono ricavare imponendo le altre due condizioni all'estremo $s = \ell$, cioè di spostamento e momento nulli:

$$\begin{aligned} 0 = v[\ell] &= c_1 \ell + c_3 \ell^3 + c_4 \ell^4 \\ &\equiv \vartheta[0] \ell - \frac{T[0]}{6 EJ} \ell^3 - \frac{F \ell^3}{24 EJ} \\ 0 = EJ v''[\ell] &= EJ (6c_3 \ell + 12c_4 \ell^2) \\ &\equiv -T[0] \ell - \frac{F \ell}{2} \end{aligned}$$

da cui si ha $T[0] = -\frac{F}{2}$ e $\vartheta[0] = -\frac{F \ell^2}{24 EJ}$. La soluzione del problema risulta quindi:

$$\begin{aligned} v[s] &= -\frac{F \ell^2}{24 EJ} s + \frac{F}{12 EJ} s^3 - \frac{F/\ell}{24 EJ} s^4 \\ \vartheta[s] &= -\frac{F \ell^2}{24 EJ} + \frac{F}{4 EJ} s^2 - \frac{F/\ell}{6 EJ} s^3 \\ M[s] &= \frac{F}{2} s - \frac{F}{2 \ell} s^2 \\ T[s] &= -\frac{F}{2} + \frac{F}{\ell} s \end{aligned}$$

2.2.2 Trave doppiamente incastrata

Si consideri l'esempio rappresentato in Figura 7.

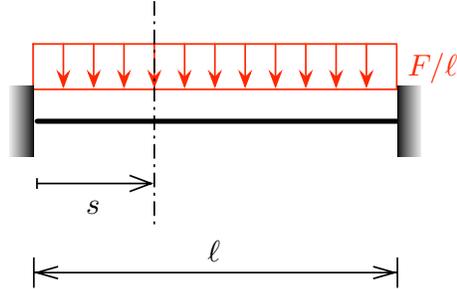


Figura 7: trave doppiamente incastrata.

Per tale esempio si possono quindi porre le seguenti condizioni sui coefficienti dei polinomi (13):

$$\begin{aligned} c_4 &= -\frac{F/\ell}{24 EJ} \\ c_0 &= 0 \\ c_1 &= 0 \\ c_2 &= \frac{M[0]}{2 EJ} \\ c_3 &= -\frac{T[0]}{6 EJ} \end{aligned}$$

Per determinare $M[0]$ e $T[0]$ si può procedere analogamente a prima, imponendo le seguenti condizioni all'estremo $s = \ell$

$$\begin{aligned} 0 &= v[\ell] = c_2 \ell^2 + c_3 \ell^3 + c_4 \ell^4 \\ &\equiv \frac{M[0]}{2 EJ} \ell^2 - \frac{T[0]}{6 EJ} \ell^3 - \frac{F \ell^3}{24 EJ} \\ 0 &= v'[\ell] = 2c_2 \ell + 3c_3 \ell^2 + 4c_4 \ell^3 \\ &\equiv \frac{M[0]}{2 EJ} \ell - \frac{T[0]}{2 EJ} \ell^2 - \frac{F \ell^2}{6 EJ} \end{aligned}$$

oppure, usare l'informazione data dalla simmetria della struttura, cioè che il caso in Figura 7 differisce dal precedente di Figura 6 solo per un momento costante $M[0]$. Quindi, come il precedente, deve essere $T[0] = -\frac{F}{2}$, che tramite una sola delle due condizioni su $s = \ell$ qui introdotte, fornisce $M[0] = -\frac{F \ell}{12}$.

La soluzione finale del problema risulta pertanto:

$$\begin{aligned} v[s] &= -\frac{F \ell}{24 EJ} s^2 + \frac{F}{12 EJ} s^3 - \frac{F/\ell}{24 EJ} s^4 \\ \vartheta[s] &= -\frac{F \ell^2}{12 EJ} s + \frac{F}{4 EJ} s^2 - \frac{F/\ell}{6 EJ} s^3 \\ M[s] &= -\frac{F \ell}{12} + \frac{F}{2} s - \frac{F}{2 \ell} s^2 \\ T[s] &= -\frac{F}{2} + \frac{F}{\ell} s \end{aligned}$$

2.2.3 Semi-telaio

Si consideri l'esempio rappresentato in Figura 8, costituito da un sistema di due tratti di trave continui caratterizzate dalle stesse proprietà di rigidezza. Ogni tratto necessita di una definizione diversa dei parametri cinematici della sezione, così come indicati nella stessa figura. Si noti che il problema assiale di un tratto risulta accoppiato con quello flessionale dell'altro.

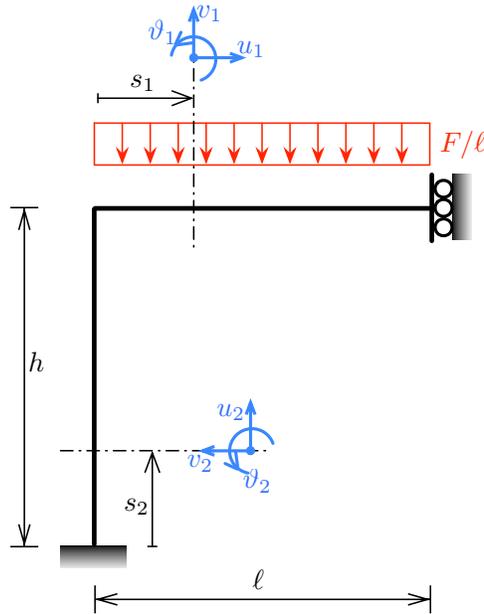


Figura 8: semi telaio.

Le funzioni polinomiali della cinematica lungo il tratto verticale (pilastro) e di quella lungo il tratto orizzontale (trave) possono quindi essere scritte rispettivamente come

$$\begin{cases} u_2[s_2] = d_{0_2} + d_{1_2}s_2 \\ v_2[s_2] = c_{0_2} + c_{1_2}s_2 + c_{2_2}s_2^2 + c_{3_2}s_2^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_1[s_1] = d_{0_1} + d_{1_1}s_1 \\ v_1[s_1] = c_{0_1} + c_{1_1}s_1 + c_{2_1}s_1^2 + c_{3_1}s_1^3 - \frac{F/\ell}{24EJ}s_1^4 \end{cases}$$

con 12 coefficienti costanti da determinare. Le 12 condizioni al bordo dei due tratti continui, pilastro e trave, corrispondono a quelle fornite dai vincoli esterni, cioè della sezione vincolata con un incastro:

$$u_2[0] = 0, \quad v_2[0] = 0, \quad v_2'[0] = 0;$$

e della sezione vincolata con un glifo:

$$u_1[\ell] = 0, \quad (-EJ)v_1'''[\ell] = 0, \quad v_1'[\ell] = 0;$$

A queste si aggiungono le condizioni di continuità nel nodo in comune ai due tratti in termini sia cinematici:

$$u_2[h] = v_1[0], \quad v_2[h] = -u_1[0], \quad v_2'[h] = v_1'[0]; \quad (14)$$

sia dinamici:

$$(EA)u_2'[h] = (-EJ)v_1'''[0], \quad (-EJ)v_2'''[h] = -(EA)u_1'[0], \quad (EJ)v_2''[h] = (EJ)v_1''[0]; \quad (15)$$

La continuità cinematica traduce in particolare il fatto che spostamenti assiali di un tratto coincidono con spostamenti trasversali dell'altro, e viceversa, mentre forze di taglio coincidono – a meno di un segno – a forze normali, e viceversa, per la continuità dinamica; infine, tra rotazioni e momenti dei due tratti si corrispondono direttamente a ridosso nel nodo in comune.

Le prime tre condizioni impongono $d_{0_2} \equiv c_{0_2} \equiv c_{1_2} = 0$ semplificando la cinematica del pilastro in

$$\begin{cases} u_2[s_2] = d_{1_2} s_2 \\ v_2[s_2] = c_{2_2} s_2^2 + c_{3_2} s_2^3 \end{cases} \quad (16)$$

le seconde tre impongono

$$\begin{cases} 0 = d_{0_1} + d_{1_1} \ell \\ 0 = (-EJ)6c_{3_1} + \frac{F}{\ell} \ell \\ 0 = c_{1_1} + 2c_{2_1} \ell + 3c_{3_1} \ell^2 - \frac{F/\ell}{6EJ} \ell^3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} d_{0_1} = -d_{1_1} \ell \\ c_{3_1} = \frac{F}{6EJ} \\ c_{1_1} = -2c_{2_1} \ell - \frac{F\ell^2}{3EJ} \end{cases}$$

semplificando così la cinematica della trave in

$$\begin{cases} u_1[s_1] = d_{1_1} (s_1 - \ell) \\ v_1[s_1] = c_{0_1} + c_{2_1} (-2s_1 \ell + s_1^2) + \frac{F/\ell}{6EJ} \left(-2\ell^3 s_1 + \ell s_1^3 - \frac{s_1^4}{4} \right) \end{cases} \quad (17)$$

Restano quindi altri 6 coefficienti, 3 in (16) e 3 in (17), da determinare tramite le condizioni di continuità (14) e (15), che accoppiano le descrizioni dei due tratti secondo il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} d_{1_2} h = c_{0_1} \\ c_{2_2} h^2 + c_{3_2} h^3 = -d_{1_1} \ell \\ 2c_{2_2} h + 3c_{3_2} h^2 = -2c_{2_1} \ell - \frac{F\ell^2}{3EJ} \end{cases} \leftarrow \begin{cases} u_2[h] = v_1[0] \\ v_2[h] = -u_1[0] \\ v_2'[h] = v_1'[0] \end{cases}$$

$$\begin{cases} (EA)d_{1_2} = -F \\ (EJ)6c_{3_2} = (EA)d_{1_1} \\ 2c_{2_2} + 6c_{3_2} h = 2c_{2_1} \end{cases} \leftarrow \begin{cases} (EA)u_2'[h] = (-EJ)v_1''[0] \\ (EJ)v_2''[h] = (EA)u_1'[0] \\ v_2''[h] = v_1''[0] \end{cases}$$

Da questo, ponendo $k = \frac{12EJ}{EA\ell^2}$, si ottiene

$$d_{1_2} = -\frac{F}{EA}, \quad d_{1_1} = -\frac{2Fh^2\ell^2}{EAh^4 - 12EJh\ell + 4EAh^3\ell - 12EJ\ell^2}$$

$$c_{0_1} = -\frac{Fh}{EA}, \quad c_{2_1} = \frac{2F\ell^2(EAh^3 - 3EJ\ell)}{3EJ(-EAh^4 + 12EJh\ell - 4EAh^3\ell + 12EJ\ell^2)}$$

$$c_{2_2} = -\frac{F\ell^2(EAh^3 + 6EJ\ell)}{3EJ(12EJ\ell(h + \ell) - EAh^3(h + 4\ell))}, \quad c_{3_2} = \frac{EAFh^2\ell^2}{3EJ(12EJ\ell(h + \ell) - EAh^3(h + 4\ell))}$$

3 Confronto tra modelli

Sulla base dei principi di potenza e criteri energetici è possibile fare un confronto qualitativo e quantitativo tra i due modelli di trave di Euler-Bernoulli e Timoshenko. A questo scopo, si indicheranno qui tutte le grandezze associate al modello di Euler-Bernoulli con il pedice “A”, per distinguerle da quelle associate al modello di Timoshenko (identificate invece con il pedice “E”). Sotto opportune condizioni, si dimostrerà che:

- a parità di carichi agenti, le grandezze cinematiche valutate sul modello di Euler-Bernoulli sono mediamente più basse di quelle valutate sul modello di Timoshenko;
- a parità di carichi agenti, le sollecitazioni misurate per equilibrio con il modello di Euler-Bernoulli sono mediamente più alte di quelle misurate sul modello di Timoshenko.

3.1 Aspetti energetici del problema elastico-lineare

I principi di potenza cui si fa riferimento sono il principio di bilancio e il principio di dissipazione, rispettivamente:

$$\mathcal{P}_e - \mathcal{P}_i = 0 \quad (18a)$$

$$\mathcal{P}_i - \dot{\phi} \geq 0 \quad (18b)$$

che qualunque modello deve essere in grado di soddisfare. In particolare, si ricorda che, per stati di sollecitazione equilibrati, i due principi si sintetizzano nell'unica disuguaglianza

$$\mathcal{P}_e - \dot{\phi} \geq 0 \quad (19)$$

In questo capitolo, per semplicità risultati e argomentazioni saranno d'ora in avanti descritti in termini della sola parte assiale del problema, essendone il problema complessivo (assiale e flessionale) una semplice estensione.

Minimo dell'energia potenziale totale

Per un campo u di spostamenti cinematicamente compatibile, le deformazioni sono funzioni di u , e - in assenza di dissipazione - si dimostra che la grandezza

$$\Pi[u] := \frac{1}{2} \int EA \varepsilon[s]^2 - \int p[s]u[s] - \left[N[s]u[s] \right]_0^\ell \quad (20)$$

è minima per quel particolare (unico) \bar{u} a cui è associato uno stato di sollecitazione equilibrato, che quindi definisce la soluzione del problema elastico-lineare. $\Pi[u]$ è detta energia potenziale totale, e si compone dell'energia di deformazione $\phi[u] \equiv \frac{1}{2} \int EA \varepsilon[s]^2$ e del lavoro esterno $\mathcal{L}_e[u] \equiv \int p[s]u[s] + \left[N[s]u[s] \right]_0^\ell$, speso dai carichi esterni $p[s]$, $N[0]$ e $N[\ell]$.

Per la dimostrazione di minimo si procede in questo modo:

1. si verifica che la derivata rispetto a u di $\Pi[u]$ sia nulla solo all'equilibrio, $\frac{d\Pi}{du} = 0$ per $u \equiv \bar{u}$, cioè per quella \bar{u} compatibile a cui corrisponde anche uno stato di sollecitazione \bar{N} equilibrato;
2. si verifica che per una generica soluzione compatibile, ma non equilibrata, $\bar{u} + \Delta u$, risulta $\Pi[\bar{u} + \Delta u] \geq \Pi[\bar{u}]$.

Si noti che per campo u genericamente compatibile ma non equilibrato si intende una cinematica le cui deformazioni forniscono ε , per i legami costitutivi, delle sollecitazioni $N[s] = EA\varepsilon[s]$ che non sono in equilibrio con i carichi assegnati; \bar{u} è sia compatibile sia equilibrata, e quindi coincide con la soluzione del problema elastico-lineare. Al posto della derivata $\frac{d\Pi}{du}$ si valuti più semplicemente $\dot{\Pi}[u]$, che assume un valore nullo quando anche la prima lo assume, in quanto $\dot{\Pi}[u] = \frac{d\Pi}{du}\dot{u}$.

L'espressione

$$\dot{\Pi}[u] = \int EA\varepsilon[s]\dot{\varepsilon}[s] - \int p[s]\dot{u}[s] - \left[N[s]\dot{u}[s] \right]_0^\ell$$

è nulla solo per un campo compatibile che sia anche equilibrato. Infatti, per principio degli spostamenti virtuali (6), scegliendo $\dot{u} \equiv \tilde{u}$, risulta

$$- \int p[s]\tilde{u}[s] - \left[N[s]\tilde{u}[s] \right]_0^\ell = - \int N[s]\tilde{\varepsilon}[s]$$

essendo quindi $N[s]$ il campo di sollecitazioni necessarie all'equilibrio; ciò implica che $\dot{\Pi}[u] = 0$ è solo per $u = \bar{u}$ soluzione equilibrata, per la quale cioè $\bar{N}[s] = EA\bar{\varepsilon}[s]$ è in equilibrio come lo è $N[s]$.

Questo risultato attesta che \bar{u} è o un minimo o un massimo per $\Pi[u]$. In realtà, si verifica che è un minimo, come enunciato.

Infatti, considerando un generico campo compatibile $u = \bar{u} + \Delta u$, che si discosti di Δu da quello in equilibrio \bar{u} , risulta

$$\begin{aligned} \Pi[\bar{u} + \Delta u] - \Pi[\bar{u}] &= \frac{1}{2} \int EA \Delta\varepsilon[s]^2 + \int EA\bar{\varepsilon}[s]\Delta\varepsilon[s] - \int p[s]\Delta u[s] - \left[N[s]\Delta u[s] \right]_0^\ell \\ &\equiv \frac{1}{2} \int EA \Delta\varepsilon[s]^2 \geq 0 \end{aligned}$$

e quindi $\Pi[\bar{u} + \Delta u] \geq \Pi[\bar{u}]$, per qualunque campo $\bar{u} + \Delta u$ compatibile (ma non equilibrato); $\Pi[\bar{u}]$ è quindi un minimo per $\Pi[u]$. Nei passaggi è stato usato, di nuovo, il principio degli spostamenti virtuali insieme all'ipotesi che sia \bar{u} compatibile, ma anche equilibrato, cosa che fa scomparire tutti e tre i termini nella precedente espressione.

Infine, il valore di minimo $\Pi[\bar{u}]$, ottenuto riscrivendo la (20) con \bar{u} , è pari a

$$\Pi[\bar{u}] = \frac{1}{2} \int EA\bar{\varepsilon}[s]^2 - \int p[s]\bar{u}[s] - \left[N[s]\bar{u}[s] \right]_0^\ell \equiv -\frac{1}{2} \int EA\bar{\varepsilon}[s]^2 \quad (21)$$

in cui si è qui sfruttato nuovamente il principio degli spostamenti virtuali, considerando \bar{u} come tali, $\tilde{u} \equiv \bar{u}$.

Minimo dell'energia complementare totale

L'energia complementare totale

$$\Psi[N] := \frac{1}{2} \int \frac{N^2[s]}{EA} - \left[N[s]u[s] \right]_0^\ell \quad (22)$$

valutata per un generico campo di sollecitazioni equilibrato (ma non compatibile) assume un minimo in corrispondenza della soluzione (e quindi anche compatibile). Si parla quindi di un generico campo N le cui deformazioni associate per legame costitutivo ($\varepsilon[s] = \frac{N[s]}{EA}$) non sono equivalenti alle deformazioni dedotte dagli spostamenti per differenziazione come $\varepsilon[s] = u'[s]$.

L'enunciato di minimo di $\psi[s]$ si dimostra come in precedenza, verificando che $\dot{\Psi}[N]$ è nullo in soluzione ($\dot{\Psi}[\bar{N}] = 0$), cioè per quella particolare N corrispondente anche a un campo deformativo compatibile.

L'espressione

$$\dot{\Psi}[N] = \int \dot{N}[s] \frac{N[s]}{EA} - \left[\dot{N}[s]u[s] \right]_0^\ell$$

è nulla solo per un campo equilibrato che sia anche compatibile, ovvero $\dot{\Psi}[N]$ riscritta per il teorema fondamentale dell'analisi come

$$\dot{\Psi}[N] = \int \dot{N}[s] \frac{N[s]}{EA} - \int \dot{N}'[s] u[s] - \int \dot{N}[s] u'[s]$$

assume un valore nullo in corrispondenza di $N[s] = \bar{N}[s]$ anche compatibile. Infatti, per il principio delle forze virtuali (7), $\dot{N}[s]$ è una sollecitazione virtuale \check{N} , in particolare equilibrata con carichi nulli perché $N[s]$ è equilibrata per ipotesi con $p[s]$, $N[0]$ e $N[\ell]$, cioè $\int \check{N}'[s] u[s] = 0$ per ogni $\check{N}[s] \equiv \check{N}[s]$ (equilibrato); l'espressione che ne risulta

$$\dot{\Psi}[N] \equiv \int \dot{N}[s] \frac{N[s]}{EA} - \int \dot{N}[s] u'[s] = \int \dot{N}[s] \left(\frac{N[s]}{EA} - u'[s] \right)$$

si annulla solo per $N[s] = \bar{N}[s]$ che per compatibilità verifica l'equazione $\frac{\bar{N}[s]}{EA} \equiv \bar{\varepsilon}[s] = u'[s]$.

Questo risultato attesta che \bar{N} è o un minimo o un massimo per $\Psi[N]$. In realtà, si verifica che è un minimo, come enunciato.

Infatti, considerando un generico campo equilibrato $N = \bar{N} + \Delta N$, che si discosti di ΔN da quello compatibile \bar{N} , soluzione del problema elastico-lineare, risulta

$$\begin{aligned} \Psi[\bar{N} + \Delta N] - \Psi[\bar{N}] &= \frac{1}{2} \int \frac{\Delta N^2[s]}{EA} + \int \Delta N[s] \frac{\bar{N}[s]}{EA} - \left[\Delta N[s] u[s] \right]_0^\ell \\ &\equiv \frac{1}{2} \int \frac{\Delta N^2[s]}{EA} \geq 0 \end{aligned}$$

e quindi $\Psi[\bar{N} + \Delta N] \geq \Psi[\bar{N}]$, per qualunque campo $\bar{N} + \Delta N$ equilibrato (ma non compatibile); $\Psi[\bar{N}]$ è quindi un minimo per $\Psi[N]$. Nei passaggi è stato usato, come prima, il teorema fondamentale dell'analisi

$$\left[\Delta N[s] u[s] \right]_0^\ell = \int \Delta N'[s] u[s] + \int \Delta N[s] u'[s]$$

e si sono sfruttati il principio delle forze virtuali, con ΔN preso come tali, $\check{N} \equiv \Delta N$ (equilibrato con carichi nulli), e l'assunto che \bar{N} sia anche compatibile, $\frac{\bar{N}[s]}{EA} \equiv \bar{\varepsilon}[s] = u'[s]$.

Grazie agli stessi ingredienti usati nella dimostrazione, il valore di minimo della (22)

$$\Psi[\bar{N}] = \frac{1}{2} \int \frac{\bar{N}^2[s]}{EA} - \left[\bar{N}[s] u[s] \right]_0^\ell \quad (23)$$

è in stretta relazione con il valore di minimo $\Pi[\bar{u}]$ dell'energia potenziale totale. In particolare, l'espressione della somma dei due minimi

$$\begin{aligned} \Pi[\bar{u}] + \Psi[\bar{N}] &= \frac{1}{2} \int EA \bar{\varepsilon}[s]^2 - \int p[s] \bar{u}[s] - \left[N[s] \bar{u}[s] \right]_0^\ell \\ &\quad + \frac{1}{2} \int \frac{\bar{N}^2[s]}{EA} - \left[\bar{N}[s] u[s] \right]_0^\ell \\ &\equiv \int \bar{N}[s] \bar{\varepsilon}[s] - \int p[s] \bar{u}[s] - \left[\bar{N}[s] \bar{u}[s] \right]_0^\ell \end{aligned} \quad (24)$$

è nulla perché coincide con una scrittura di principio di bilancio (18a). Questo risultato si ottiene notando che il termine di lavoro speso agli estremi della trave risulta

$$\left[N[s] \bar{u}[s] \right]_0^\ell + \left[\bar{N}[s] u[s] \right]_0^\ell \equiv \left[\bar{N}[s] \bar{u}[s] \right]_0^\ell \quad (25)$$

perché ha il primo termine che assume nella (20) il significato di $(u[0], u[\ell])$ variabili con $(N[0], N[\ell])$ dati del problema (cioè carichi puntuali agli estremi), mentre il secondo termine assume nella (22) il significato opposto, $(N[0], N[\ell])$ variabili, derivabili da $N[s]$, con $(u[0], u[\ell])$ dati del problema (cioè eventuali cedimenti vincolari agli estremi, o usualmente condizioni cinematiche nulle).

In definitiva, l'annullarsi della (24), e le due condizioni energetiche di minimo dimostrate attestano che se N è un generico campo di sollecitazioni equilibrato, e u un generico campo di spostamenti compatibile, vale sempre la seguente relazione

$$\Psi[N] \geq \Psi[\bar{N}] = -\Pi[\bar{u}] \geq -\Pi[u] \quad (26)$$

3.2 Confronto tra le descrizioni dinamiche

Il modello di Euler-Bernoulli è equilibrato con i carichi a cui è soggetto anche il modello di Timoshenko (che è possibile considerare come un modello esatto), ma non è detto sia compatibile poiché considera nulle le deformazioni di scorrimento γ , che in generale non lo sono. Vale pertanto invocare la condizione di minimo dell'energia complementare, che attesta

$$\Psi_A \geq \Psi_E \equiv \bar{\Psi} \quad (27)$$

Quindi, le sollecitazioni valutate per equilibrio con il modello di Euler-Bernoulli $\{N_A, T_A, M_A\}$ sono in generale superiori (in media) rispetto a quelle valutate con il modello di Timoshenko $\{N_A, T_A, M_A\} \equiv \{\bar{N}, \bar{T}, \bar{M}\}$, interpretando le forme complementari dell'energia di deformazione dei modelli

$$\begin{aligned} \psi_A &= \int \left\{ \frac{N_A^2[s]}{EA} + \frac{M_A^2[s]}{EJ} \right\} \\ \psi_E &= \int \left\{ \frac{N_E^2[s]}{EA} + \frac{T_E^2[s]}{GA^*} + \frac{M_E^2[s]}{EJ} \right\} \end{aligned}$$

come una misura media dello stato di sollecitazione. Infatti, nell'espressione dell'energia complementare (22) i termini energetici valutati agli estremi della trave devono essere uguali per i due modelli perché, essendo entrambi equilibrati, le sollecitazioni in $(0, \ell)$ sono identiche; la (27) può essere quindi riscritta come

$$\psi_A \geq \psi_E \quad (28)$$

3.3 Confronto tra le descrizioni cinematiche

Assumendo sempre il modello di Timoshenko come esatto, e ipotizzando che la trave in realtà non ammetta energia di deformazione di taglio, cioè $\int GA^* \gamma^2 = 0$, o che sia trascurabile il suo contributo (travi snelle), i due modelli risultano entrambi compatibili e la condizione di minimo della (20) richiede che

$$\Pi_A \geq \Pi_E \equiv \bar{\Pi}$$

Ciò significa che, a parità di carichi assegnati, le componenti di spostamento valutate con Euler-Bernoulli sono mediamente inferiori a quelle valutate con Timoshenko, avendo il lavoro esterno il significato di una misura media della cinematica della trave. Infatti, i termini di energia di deformazione si annullano l'uno con l'altro, e si ottiene

$$\begin{aligned} 0 \leq \Pi_A - \Pi_E &= - \int p[s]u_A[s] - \left[N[s]u_A[s] \right]_0^\ell + \int p[s]u_E[s] + \left[N[s]u_E[s] \right]_0^\ell \\ &\equiv \int p[s](u_E[s] - u_A[s]) + \left[N[s](u_E[s] - u_A[s]) \right]_0^\ell \end{aligned}$$

3.4 Soluzioni approssimate

I due risultati ottenuti in precedenza confrontando il modello di trave di Euler-Bernoulli con quello di Timoshenko possono essere generalizzati guardando al primo come un modello approssimato del secondo ritenuto invece esatto.

Si può quindi asserire che

- un modello approssimato basato su una descrizione cinematica compatibile, forzata a essere in equilibrio – tramite le proprie corrispondenti sollecitazioni – con i carichi assegnati, descrive un comportamento strutturale in generale più rigido di quello descritto dal modello esatto, e ammette quindi valori di spostamento mediamente più bassi di quelli esatti;
- un modello approssimato basato su una descrizione dinamica (in termini di sollecitazioni) in equilibrio con i carichi assegnati, ammette – se forzata a essere anche compatibile – valori di sollecitazione mediamente più alti di quelli ottenuti a partire dal modello esatto.

3.5 Confronto analitico per alcuni esempi di trave

Negli esempi che seguono si opera un confronto analitico tra i modelli di trave di Euler-Bernoulli e Timoshenko. Per identificare le quantità riferite a tali modelli si usano ancora i pedici “A” e “E”, rispettivamente. Come fatto in precedenza, si omette il calcolo delle grandezze assiali u e N , che nel caso particolare degli esempi trattati sono tra l'altro identicamente nulle.

In assenza di coppie distribuite μ , entrambi i modelli leggono l'equilibrio indefinito tra le sollecitazioni (cfr. la seconda e terza equazione in (1a)) come:

$$M_A''[s] = q[s] \quad (29a)$$

$$M_E''[s] = q[s] \quad (29b)$$

risultando così $M_E''[s] \equiv M_A''[s]$, pur essendo noto che:

$$M_A[s] = EJ \vartheta_E'[s] \quad (30a)$$

$$M_E[s] = EJ v_E''[s] \quad (30b)$$

La differenza tra i modelli si evidenzia invece nella soluzione alla Navier dello stesso equilibrio, cioè

$$EJ \vartheta_E'''[s] = q \quad (31a)$$

$$EJ v_A''''[s] = q \quad (31b)$$

Pertanto, le descrizioni cinematiche sono legate dalla condizione $\vartheta_E'''[s] \equiv v_A''''[s]$. Si integri tre volte tale condizione:

$$\vartheta_E'''[s] = v_A''''[s] \quad (32a)$$

↓

$$\vartheta_E''[s] = v_A'''[s] + c_1 \quad (32b)$$

$$\vartheta_E'[s] = v_A''[s] + c_1 s + c_2 \quad (32c)$$

$$\vartheta_E[s] = v_A'[s] + \frac{c_1}{2} s^2 + c_2 s + c_3 \quad (32d)$$

(ovvero)

$$\vartheta_E[s] \equiv \vartheta_A[s] + \frac{c_1}{2} s^2 + c_2 s + c_3 \quad (32e)$$

da questa risulta chiaro come le due descrizioni in termini di rotazione differiscano di un termine quadratico, retto da tre costanti c_1 , c_2 e c_3 , da determinare in funzione delle condizioni al bordo della trave. Tramite l'integrazione della soluzione cinematica (32d), è possibile ricostruire la relazione di confronto tra le sollecitazioni $M[s]$:

$$M_E[s] \stackrel{(30a)}{\stackrel{\downarrow}{=}} EJ \vartheta_E'[s] \stackrel{(32c)}{\stackrel{\downarrow}{=}} EJ v_A''[s] + EJ (c_1 s + c_2) \stackrel{(30b)}{\stackrel{\downarrow}{=}} M_A[s] + EJ (c_1 s + c_2)$$

e quindi:

$$\frac{M_E[s]}{EJ} = \frac{M_A[s]}{EJ} + c_1 s + c_2 \quad (33)$$

ossia, le due descrizioni in termini di sollecitazione flettente differiscono di un termine lineare. Le descrizioni in termini di sollecitazione di taglio differiscono infine solo di un termine costante, in quanto derivabili dalla (33), richiamando la condizione di equilibrio $M'[s] = -T[s]$, valida per entrambi i modelli:

$$\frac{T_E[s]}{EJ} = \frac{T_A[s]}{EJ} - c_1 \quad (34)$$

L'ultima condizione di confronto tra $v_A[s]$ e $v_E[s]$ si ottiene dalla condizione di equilibrio nella trave di Timoshenko tra taglio e momento, e grazie al legame costitutivo tra taglio e deformazione $\gamma[s]$:

$$EJ \vartheta_E''[s] = M_E'[s] = -T_E[s] = -GA^*(v_E'[s] - \vartheta_E[s])$$

Introducendo in questa le espressioni (32d) e (32b), si ricava

$$\begin{aligned} -GA^*(v'_E[s] - \vartheta_E[s]) &\stackrel{(32d)}{\stackrel{\downarrow}{=}} -GA^*(v'_E[s] - v'_A[s] - \frac{c_1}{2}s^2 - c_2s - c_3) \\ &\stackrel{(32b)}{\stackrel{\downarrow}{=}} EJ\vartheta''_E[s] \stackrel{\downarrow}{=} EJ(v'''_A[s] + c_1) \end{aligned}$$

ovvero

$$v'_A[s] - v'_E[s] = -\left(\frac{c_1}{2}s^2 + c_2s + c_3\right) + \frac{EJ}{GA^*}(v'''_A[s] + c_1)$$

la quale, integrata, fornisce

$$v_A[s] - v_E[s] = -\left(\frac{c_1}{6}s^3 + \frac{c_2}{2}s^2 + c_3s\right) + \frac{EJ}{GA^*}(v''_A[s] + c_1s) + c_4 \quad (35)$$

In definitiva, raccogliendo le equazioni (32e), (33), (34) e (35), il confronto analitico tra i due modelli risulta dalle seguenti espressioni

$$M_E[s] = M_A[s] + EJ(c_1s + c_2) \quad (36a)$$

$$T_E[s] = T_A[s] - EJ(c_1) \quad (36b)$$

$$\vartheta_E[s] = \vartheta_A[s] + \frac{c_1}{2}s^2 + c_2s + c_3 \quad (36c)$$

$$v_E[s] = v_A[s] - \frac{M_A[s]}{GA^*} + c_1\left(\frac{s^3}{6} - \frac{EJ}{GA^*}s\right) + \frac{c_2}{2}s^2 + c_3s - c_4 \quad (36d)$$

3.5.1 Trave doppiamente appoggiata

Si fa riferimento allo stesso problema di Figura 6, in cui si sono aggiunte le condizioni al bordo della trave nel modo in cui sono lette dai due modelli, come evidenziato in Figura 9. Nella sezione $s = 0$, la

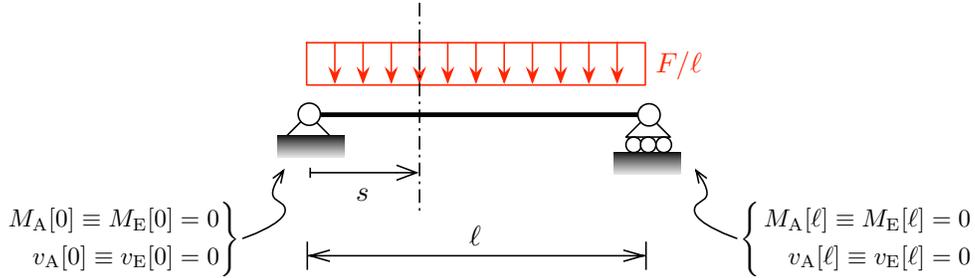


Figura 9: trave doppiamente appoggiata: confronto tra i modelli di trave.

condizione $M_A[0] \equiv M_E[0] = 0$ introdotta nella (36a) impone che $c_2 = 0$; le condizioni $v_A[0] \equiv v_E[0] = 0$ e $M_A[0]$ introdotte nella (36d), impongono invece che $c_4 = 0$. Con questi due risultati sulle costanti c_2 e c_4 , le altre due condizioni al bordo introdotte nelle stesse (36a) e (36d)

$$\begin{aligned} 0 &= 0 + EJ(c_1\ell + 0) \\ 0 &= 0 - \frac{0}{GA^*} + c_1\left(\frac{\ell^3}{6} - \frac{EJ}{GA^*}\ell\right) + \frac{0}{2}\ell^2 + c_3\ell - 0 \end{aligned}$$

richiedono che $c_1 = 0$, e $c_3 = 0$. Pertanto, per la trave doppiamente appoggiata le (36) portano a descrivere le diverse quantità senza distinzioni tra i due modelli eccetto per la (36d), cioè

$$\begin{aligned} M_E[s] &\equiv M_A[s] \\ T_E[s] &\equiv T_A[s] \\ \vartheta_E[s] &\equiv \vartheta_A[s] \\ v_E[s] &\equiv v_A[s] - \frac{M_A[s]}{GA^*} \end{aligned} \quad (37)$$

3.5.2 Trave doppiamente incastrata

Si fa riferimento allo stesso problema di Figura 7, in cui si sono aggiunte le condizioni al bordo della trave nel modo in cui sono lette dai due modelli, come evidenziato in Figura 10.

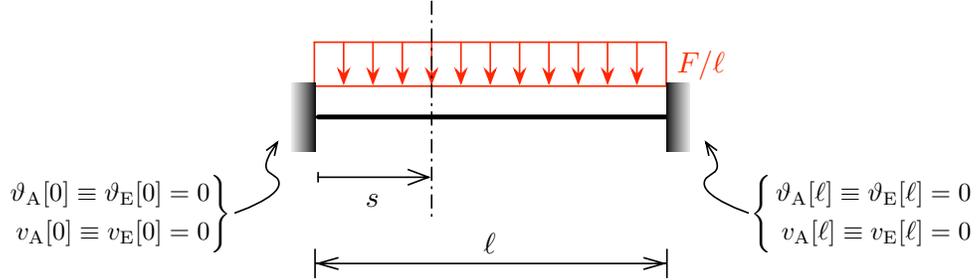


Figura 10: trave doppiamente incastrata: confronto tra i modelli di trave.

Aumentando il grado di iperstaticità c'è da attendersi una più evidente differenza nelle descrizioni cinematiche e dinamiche. Ripetendo simili passaggi, e in particolare introducendo le condizioni al bordo nelle espressioni (36c) e (36d)

$$\begin{aligned}
 0 &= 0 + \frac{c_1}{2} 0 + c_2 0 + c_3 \\
 0 &= 0 - \frac{M_A[0]}{GA^*} + c_1 \left(\frac{0}{6} - \frac{EJ}{GA^*} 0 \right) + \frac{c_2}{2} 0 + c_3 0 - c_4 \\
 0 &= 0 + \frac{c_1}{2} \ell^2 + c_2 \ell + c_3 \\
 0 &= 0 - \frac{M_A[\ell]}{GA^*} + c_1 \left(\frac{\ell^3}{6} - \frac{EJ}{GA^*} \ell \right) + \frac{c_2}{2} \ell^2 + c_3 \ell - c_4
 \end{aligned}$$

si ottiene in sequenza: $c_3 = 0$, $c_4 = -\frac{M_A[0]}{GA^*}$, $c_1 = 0$ e $c_2 = 0$, essendo $M_A[0] \equiv M_A[\ell] = -\frac{F\ell}{12}$. Pertanto, per la trave doppiamente incastrata le (36) si scrivono

$$\begin{aligned}
 M_E[s] &= M_A[s] \\
 T_E[s] &= T_A[s] \\
 \vartheta_E[s] &= \vartheta_A[s] \\
 v_E[s] &= v_A[s] - \frac{M_A[s] - M_A[0]}{GA^*}
 \end{aligned} \tag{38}$$

3.5.3 Trave doppiamente incastrata con cedimento vincolare

Si fa riferimento allo stesso problema di Figura 10, in cui si è aggiunta la condizione al bordo $s = \ell$ di un cedimento pari a δ (v. Figura 10).

La soluzione fornita dal modello di Euler-Bernoulli è

$$\begin{aligned}
 v_A[s] &= \frac{6}{\ell^2} \delta \left(-\frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{3\ell} \right) \\
 \vartheta_A[s] &= \frac{6}{\ell^2} \delta \left(-s + \frac{s^2}{\ell} \right) \\
 M_A[s] &= \frac{6EJ}{\ell^2} \delta \left(-1 + 2\frac{s}{\ell} \right) \\
 T_A[s] &= -\frac{12EJ}{\ell^3} \delta
 \end{aligned}$$

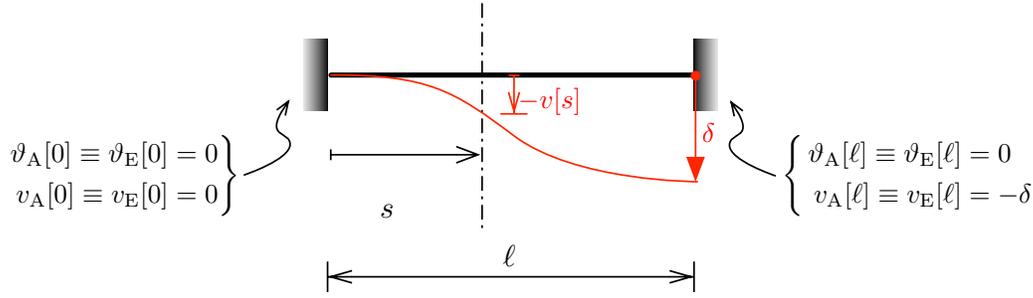


Figura 11: trave doppiamente incastrata con cedimento vincolare; confronto tra i modelli di trave.

Introducendo le condizioni al bordo nelle espressioni (36c) e (36d)

$$\begin{aligned}
 0 &= 0 + \frac{c_1}{2} 0 + c_2 0 + c_3 \\
 0 &= 0 - \frac{M_A[0]}{GA^*} + c_1 \left(\frac{0}{6} - \frac{EJ}{GA^*} 0 \right) + \frac{c_2}{2} 0 + c_3 0 - c_4 \\
 0 &= 0 + \frac{c_1}{2} \ell^2 + c_2 \ell + c_3 \\
 -\delta &= -\delta - \frac{M_A[l]}{GA^*} + c_1 \left(\frac{\ell^3}{6} - \frac{EJ}{GA^*} \ell \right) + \frac{c_2}{2} \ell^2 + c_3 \ell - c_4
 \end{aligned}$$

si ha $c_3 = 0$, $c_4 = -\frac{M_A[0]}{GA^*} \equiv \frac{6EJ}{GA^*\ell^2} \delta$, $c_2 = \frac{6}{\ell^2} \frac{\delta}{1 + \frac{GA^*\ell^2}{12EJ}}$ e $c_1 = -\frac{12}{\ell^3} \frac{\delta}{1 + \frac{GA^*\ell^2}{12EJ}}$, essendo $-M_A[0] \equiv M_A[l] \equiv \frac{6EJ}{\ell^2} \delta$. Pertanto, per la trave doppiamente incastrata con cedimento vincolare le (36) si scrivono

$$\begin{aligned}
 M_E[s] &= M_A[s] + \frac{6EJ}{\ell^2} \delta \left(1 - 2\frac{s}{\ell} \right) \frac{1}{1 + \frac{GA^*\ell^2}{12EJ}} \equiv M_A[s] \left(1 - \frac{1}{1 + \kappa} \right) \\
 T_E[s] &= T_A[s] + \frac{12EJ}{\ell^3} \delta \frac{1}{1 + \frac{GA^*\ell^2}{12EJ}} \equiv T_A[s] \left(1 - \frac{1}{1 + \kappa} \right) \\
 \vartheta_E[s] &= \vartheta_A[s] + \frac{6}{\ell^2} \delta \left(s - \frac{s^2}{\ell} \right) \frac{1}{1 + \frac{GA^*\ell^2}{12EJ}} \equiv \vartheta_A[s] \left(1 - \frac{1}{1 + \kappa} \right) \\
 v_E[s] &= v_A[s] + \frac{6}{\ell^2} \delta \left(-\frac{s^3}{3\ell} + \frac{s^2}{2} - \frac{s}{6}\ell \right) \frac{1}{1 + \frac{GA^*\ell^2}{12EJ}} \equiv v_A[s] \left(1 - \frac{1}{1 + \kappa} \right) - \frac{s}{\ell} \delta \frac{1}{1 + \kappa}
 \end{aligned} \tag{39}$$

posto $\kappa = \frac{GA^*\ell^2}{12EJ}$ il fattore di rigidità che regola il passaggio dal modello di Timoshenko a quello di Euler-Bernoulli ($\kappa \rightarrow \infty$); in una qualunque sezione, ogni grandezza infatti scala secondo lo stesso rapporto $\left(1 - \frac{1}{1 + \kappa} \right) \equiv \frac{\kappa}{1 + \kappa}$, eccetto per lo spostamento in cui il termine $\frac{s}{\ell} \delta$ che si sottrae a $v_A[s]$ modificato da κ non è altro che un rotazione rigida infinitesima generata da un abbassamento δ in $s = \ell$.

~ o ~

Sulla base dei risultati ottenuti tramite il modello di Euler-Bernoulli nei paragrafi 2.2.1 e 2.2.3, è evidente come il discostamento tra i modelli si attesti nei primi due esempi solo in termini della descrizione dello spostamento $v[s]$, risultando maggiore in corrispondenza del momento massimo, cioè per $s = \ell/2$. Per semplicità, si valuti la stessa quantità per il terzo caso, in cui le differenze tra i vari modelli sono in realtà

presenti in tutte le grandezze del problema.

$$\begin{aligned}
 \text{trave a doppiamente appoggiata : } \quad v_E[\ell/2] &= v_A[\ell/2] - \frac{M_A[\ell/2]}{GA^*} \\
 &\equiv -\frac{5F\ell^3}{384EJ} - \frac{F\ell}{4GA^*} \\
 \text{trave doppiamente incastrata : } \quad v_E[\ell/2] &= v_A[\ell/2] - \frac{M_A[\ell/2] - M_A[0]}{GA^*} \\
 &\equiv -\frac{F\ell^3}{384EJ} - \frac{F\ell}{8GA^*} \\
 \text{trave doppiamente incastrata con cedimento : } \quad v_E[\ell/2] &= v_A[\ell/2] \left(1 - \frac{1}{1+\kappa}\right) - \frac{\delta}{2} \frac{1}{1+\kappa} \\
 &\equiv -\frac{\delta}{2} \left(1 - \frac{1}{1+\kappa}\right) - \frac{\delta}{2} \frac{1}{1+\kappa} \equiv 0
 \end{aligned}$$

Considerando una trave in acciaio ($E = 210$ GPa e $G = 80$ GPa), tozza ($\ell = 1$ m), e a sezione rettangolare ($J = 30 \frac{50^3}{12} = 312500$ cm⁴ e $A^* = \frac{5}{6} 30 \cdot 50 = 1250$ cm²), caricata con un valore di $F/\ell = 1$ kN/m² \times 1 m, il modello di Euler-Bernoulli legge per la trave appoggiata un abbassamento di 1.27 cm, invece di 1.37 cm (con un errore in difetto di circa il 7%), mentre per quella incastrata un abbassamento di 25 mm, invece di 30 mm (con un errore in difetto di circa il 17%).

Nel caso, infine, della trave con cedimento vincolare δ , mentre in termini di spostamento in mezzzeria i due modelli forniscono la stessa misura (pari alla metà del cedimento), il modello di Euler-Bernoulli sovrastima il valore delle altre grandezze in una qualunque sezione dello stesso fattore $\frac{1+\kappa}{\kappa} \approx \frac{1+1.27}{1.27} \approx 1.787$, corrispondente a un errore di circa il 79%.

3.6 Strutture iperstatiche

Il principio di bilancio (ossia dei lavori virtuali) e la definizione di energia complementare consentono di dimostrare che l'aggiunta di "iperstaticità" a una struttura isostatica porta ad un abbassamento medio del livello di tensioni agenti.

Limitandosi per semplicità ancora al solo problema assiale, sia N_0 lo stato di sollecitazione di una struttura isostatica, e $N = N_0 + X N_1$ quello relativo all'aggiunta di una reazione iperstatica X . Applicando l'equazione dei lavori virtuali (6) e scegliendo come campo di spostamenti virtuali lo spostamento reale u , associato alla deformazione $\varepsilon = N/(EA) = (N_0 + X N_1)/(EA)$, le condizioni di equilibrio della struttura iperstatica e isostatica si scrivono

$$\begin{aligned}
 \left[N[s]u[s] \right]_0^\ell + \int p[s]u[s] - \int (N_0 + X N_1)[s] \frac{(N_0 + X N_1)[s]}{EA} &= 0 \\
 \left[N[s]u[s] \right]_0^\ell + \int p[s]u[s] - \int N_0[s] \frac{(N_0 + X N_1)[s]}{EA} &= 0
 \end{aligned}$$

poiché entrambi i campi di sollecitazione si equilibrano con gli stessi carichi p , $N[0]$ e $N[\ell]$. Sottraendo membro a membro si ha

$$X \int N_1[s] \frac{(N_0 + X N_1)[s]}{EA} = 0$$

ovvero la distribuzione di tensioni associate all'incognita iperstatica spende lavoro interno nullo per la deformazione reale della struttura iperstatica. L'equazione precedente può essere espressa come

$$0 = X \int N_1[s] \frac{(N_0 + X N_1)[s]}{EA} = 2X^2 \psi[N_1] + X \int N_0[s] \frac{N_1[s]}{EA} \quad (40)$$

permettendo così di riscrivere la differenza delle energie associate ai due campi di sollecitazione come

$$\psi[N_0 + X N_1] - \psi[N_0] \equiv X^2 \psi[N_1] + X \int N_0[s] \frac{N_1[s]}{EA} \stackrel{(40)}{=} -X^2 \psi[N_1] \leq 0$$

cioè $\psi[N_0 + X N_1] \leq \psi[N_0]$ (c.v.d.).

4 Distribuzione tensionale sulla sezione

Nella trattazione che segue si fa riferimento al modello di trave di Euler-Bernoulli, e si dà per noto il valore delle sollecitazioni N , T e M su una generica sezione e , tramite ipotesi di distribuzione delle tensioni agenti sull'area della sezione stessa. Si ricorda che questa è un'assunzione sempre possibile nel caso di travi isostatiche, per le quali le ipotesi di equilibrio di corpo rigido e di sezioni rigide consentono il calcolo di N , T e M tramite le sole equazioni di equilibrio; per tali travi, non è inoltre necessario introdurre l'influenza all'equilibrio della descrizione delle deformazioni, e quindi la trattazione in termini di sollecitazioni non è diversa per i due modelli di trave.

4.1 Tensioni assiali

In presenza di uno stato di sollecitazione di presso/tenso-flessione, cioè in presenza di N e M agenti su una sezione di trave individuata da s , le tensioni agenti sono solo di tipo assiale. In altri termini agiscono sulla sezione delle forze specifiche (tensioni) che tendono ad allungare (o accorciare) fibre di materiale disposte parallelamente all'asse della trave.

Siano σ tali tensioni. Volendo far sì che una distribuzione di σ su una sezione rispetti comunque l'equilibrio di corpo rigido garantito da N e M , la risultante e il momento risultante di una distribuzione di σ non possono che essere pari a N e M rispettivamente:

$$\begin{cases} N = \int_A \sigma \\ M = \int_A \sigma y \end{cases} \quad (41)$$

dove M è il momento di asse x ; la flessione quindi si sviluppa nel piano (y, s) , e la generica sezione giace nel piano (x, y) con assi centrati nel baricentro della sezione stessa.

La soluzione distributiva più semplice per rispettare queste condizioni è assumere un andamento di σ come somma di una parte costante e lineare lungo y , e costante lungo l'asse x (v. Figura 12).

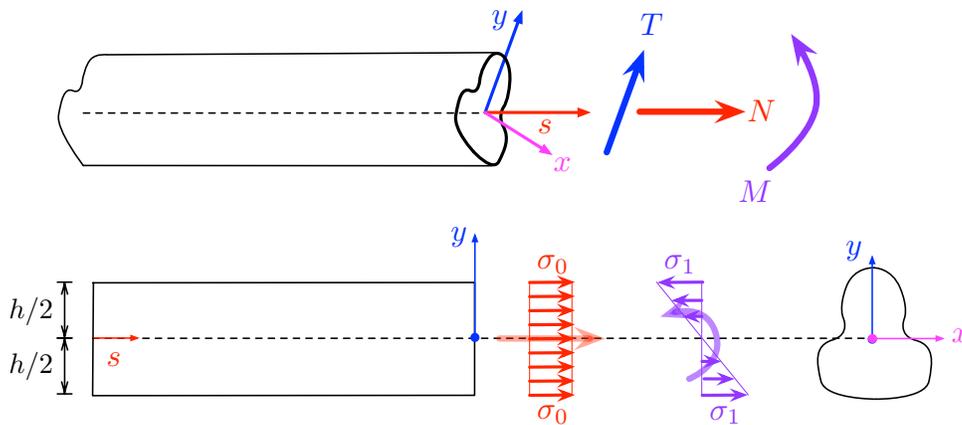


Figura 12: sollecitazioni e tensioni su una trave.

Pertanto la distribuzione di tensioni ha la forma

$$\sigma[y] = \sigma_0 - \frac{2}{h} \sigma_1 y \quad (42)$$

o più in generale

$$\sigma[y] = \sigma_0 - \frac{y}{h_{\max}} \sigma_1 \quad (43)$$

se l'asse della trave non è di simmetria, e h_{\max} è la distanza massima della fibra più esterna dall'asse sesso; si ha quindi

$$\begin{cases} N \equiv \int_A \sigma_0 = \sigma_0 A \\ M = \int_A \sigma y = \sigma_1 \frac{J}{h_{\max}} \end{cases} \quad (44)$$

in quanto per assi baricentrici il momento statico $\int_A y$ è per definizione nullo; $J = \int_A y^2$ è il momento di inerzia rispetto all'asse x , che è proprio l'asse del momento. Quindi, si è fatto in modo che, separatamente, a N corrisponda una distribuzione costante σ_0 , a M una lineare simmetrica rispetto a x (“a farfalla”) con valore massimo σ_1 agli estremi $y = \pm h/2$. Combinando (42) e (44) si ha il generico valore di tensione assiale in funzione di N e M :

$$\sigma[y] = \frac{N}{A} - \frac{M}{J} y \quad (45)$$

(formula detta di Navier).

Ha senso tecnico valutare il fattore geometrico della sezione

$$W := \frac{J}{h_{\max}}$$

che assume il significato di modulo di resistenza a sollecitazione flessionale, mentre A è quello a sollecitazione assiale. Infatti, per i due stati di sollecitazione, separatamente, la tensione massima risulta come un rapporto tra la sollecitazione e il modulo di resistenza:

$$\begin{cases} \sigma_0 = N/A \\ \sigma_1 = M/W \end{cases} \quad (46)$$

4.2 Tensioni tangenziali: trattazione approssimata di Jourawski

È questo il caso tensionale in presenza di sollecitazione di taglio T , che come noto dall'equilibrio di corpo rigido è in generale non-nulla quando il momento varia lungo l'asse della trave. Le tensioni sono forze specifiche tangenti al piano della sezione, e vengono qui riportate come τ . In particolare, tali tensioni agiscono anche su facce ortogonali alla sezione: in un elemento $ds \times dy$, in assenza di altre azioni, le tensioni tangenziali devono essere in equilibrio come riportato in Figura 13.

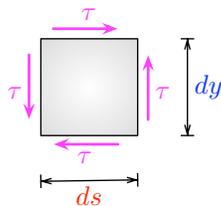


Figura 13: tensioni di taglio equilibrate su un elemento $ds \times dy$.

Per gli stessi ragionamenti fatti per le σ , una distribuzione di τ sulla generica sezione A deve avere come risultante lo sforzo di taglio T :

$$T = \int_A \tau \quad (47)$$

La valutazione delle tensioni tangenziali τ passa attraverso una valutazione approssimata dell'equilibrio con le tensioni normali σ , così come esiste la condizione di equilibrio tra le corrispondenti sollecitazioni M e T . Si consideri quindi una porzione di sezione $A[y]$ per un tratto di trave ds (v. Figura 14). L'equilibrio

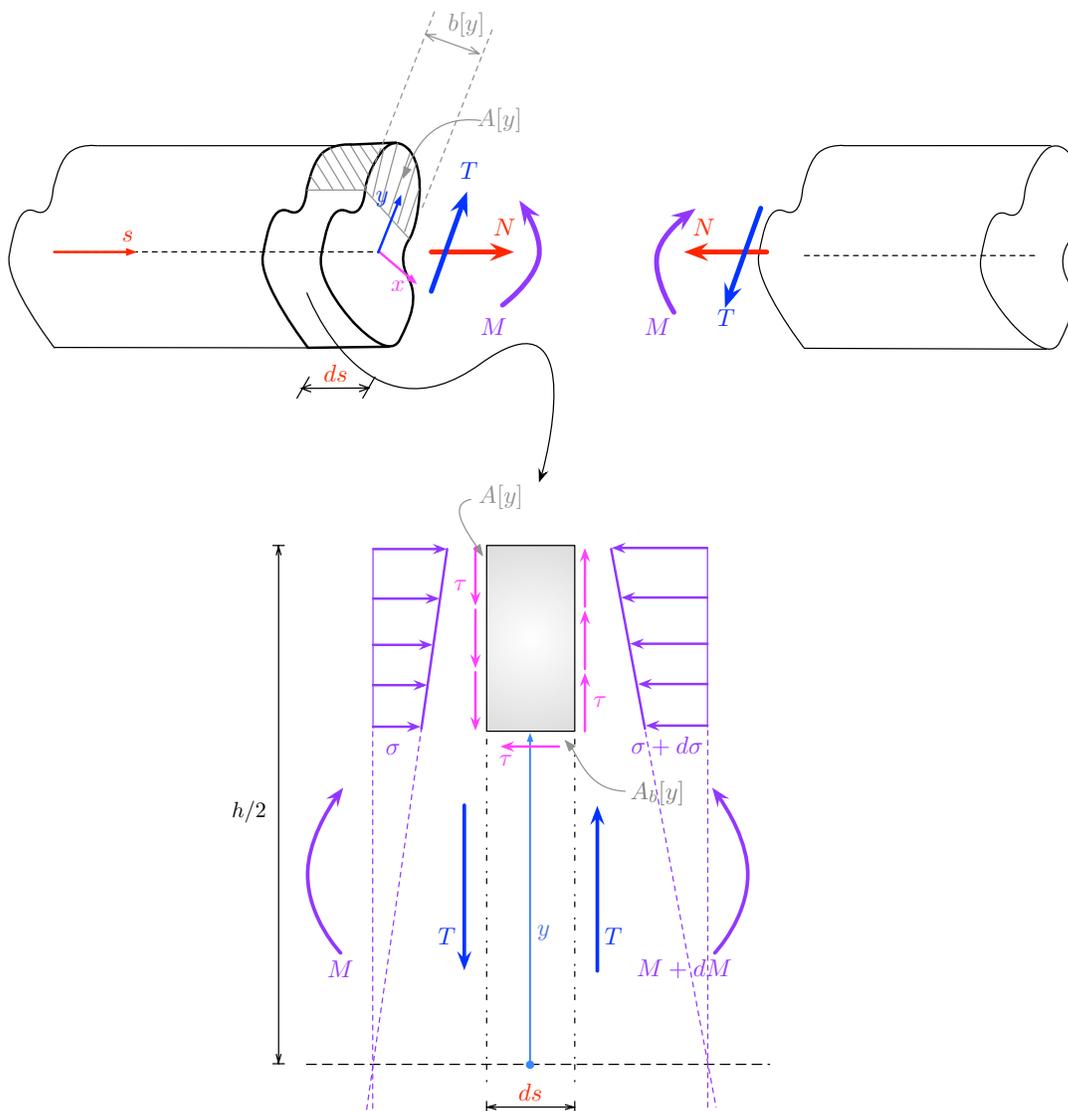


Figura 14: sollecitazioni e tensioni di taglio su un tratto ds di trave.

su questo tratto riguarda le tensioni σ e $\sigma + d\sigma$ che variano in ds , e le τ dirette come s e distribuite lungo x per un tratto $b[y]$ (profondità della sezione lungo x).

L'equilibrio alla traslazione orizzontale di questa porzione di trave, di volume $ds \times A[y]$, risulta

$$\int_{A_b[y]} \tau[y] + \int_{A[y]} (\sigma + d\sigma) - \int_{A[y]} \sigma = 0 \quad (48)$$

Se per ipotesi le τ sono costanti lungo x , e quindi il primo integrale può essere semplificato in $\tau[y]b[y]ds$, l'equilibrio fornisce una condizione per valutare le τ :

$$\tau[y]b[y]ds = - \int_{A[y]} d\sigma \quad (49)$$

In virtù del legame tra σ e M (45), cioè $d\sigma = \frac{dM}{J}y$

$$\tau b[y]ds = - \int_{A[y]} d\sigma \equiv - \frac{dM}{J} \int_{A[y]} y \quad (50)$$

e della condizione di equilibrio tra T e M , cioè $M' = -T$, l'equazione (49) fornisce infatti

$$\tau[y] = \frac{TS[y]}{Jb[y]} \tag{51}$$

essendo $S[y]$ il momento statico dell'area $A[y]$ rispetto all'asse x .

In particolare, per una sezione rettangolare, l'andamento delle τ lungo y risulta parabolico, perchè:

$$S[y] = b(h/2 - y)(h/4 + y/2) \equiv b/2(h^2/4 - y^2)$$

e quindi

$$\tau[y] = T \frac{6}{bh^3} (h^2/4 - y^2) \tag{52}$$

Il valore massimo di τ è in corrispondenza del baricentro $y = 0$, ed è pari a $\frac{3}{2} \frac{T}{bh}$; quindi il modulo di resistenza a taglio non è l'intera area bh ma $2/3$ di essa. In Figura 15 è riportata la soluzione tensionale agente su una generica sezione rettangolare.

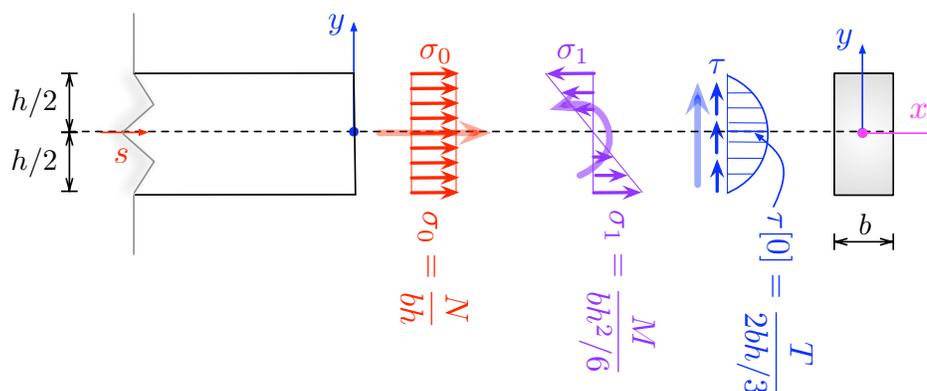


Figura 15: distribuzione di tensioni su una generica sezione rettangolare.

Volendo infine evidenziare la riduzione nel coefficiente di rigidezza a taglio dell'area – nella sezione rettangolare è $5/6$ – si può procedere per analogia con l'energia di deformazione assiale. Quest'ultima infatti, in assenza di dissipazione, porta a definire tramite le (1b) e (46) le seguenti uguaglianze:

$$EA \varepsilon^2 \equiv \frac{N^2}{EA} \equiv \int_A \frac{\sigma^2}{E}$$

Pertanto, chiamando A^* l'area ridotta come fattore geometrico presente nel coefficiente di rigidezza a taglio e introducendo direttamente il modulo di elasticità tangenziale del materiale G , si ha per una sezione rettangolare (in cui vale la (52)):

$$\frac{T^2}{GA^*} \equiv \int_A \frac{\tau^2}{G} = \frac{5}{6bh} \frac{T^2}{G} \rightarrow A^* = \frac{5}{6} A$$

Quest'ultimo risultato, visti i moduli riportati in Tabella 1, giustifica l'approssimazione $\beta \approx 1/3$.

In generale, qualunque sia la forma della sezione risulta

$$A \geq A^*$$

da cui il nome per A^* di area ridotta. Infatti, è noto che il valore quadratico medio di una funzione è sempre maggiore o uguale del quadrato del valore medio della stessa funzione; se tale funzione è la distribuzione di τ sull'area della sezione, si ha

$$\text{media}(\tau^2) \geq \text{media}^2(\tau)$$

con

$$\begin{aligned} \text{media}(\tau^2) &= \frac{1}{A} \int_A \tau^2 \equiv \frac{G}{A} \int_A \frac{\tau^2}{G} \equiv \frac{G}{A} \frac{T^2}{GA^*} = \frac{T^2}{AA^*} \\ \text{media}(\tau) &= \frac{1}{A} \int_A \tau = \frac{T}{A} \quad (\text{per la (47)}) \end{aligned}$$

e quindi:

$$\begin{aligned} \text{media}(\tau^2) &= \frac{T^2}{AA^*} \geq \text{media}^2(\tau) = \frac{T^2}{A^2} \\ &\quad \downarrow \\ &\frac{1}{A^*} \geq \frac{1}{A} \end{aligned}$$

Seppur approssimata, la trattazione di Jourawki è equilibrata: la ricostruzione delle tensioni τ a partire da T è corretta a meno dell'approssimazione di τ costante lungo $b[y]$, e se T dipende solo dalla variazione di M per equilibrio, senza cioè tener conto nella (51) dell'esistenza all'equilibrio di coppie distribuite $\mu[s]$ (cfr. terza eq. in (1a)). La trattazione stessa però ammette un errore di compatibilità. Se infatti si ammette un legame elastico tra tensioni e deformazioni tangenziali $\tau = G\gamma$ del tipo di quello definito in tensioni e deformazioni assiali con il modulo di Young, già per una sezione rettangolare trattata alla Jourawski la deformazione γ dovrebbe avere una legge parabolica in y (cfr. eq. (52)), che è incongruente con la definizione di γ stessa del modello di trave (costante per una data sezione).

4.2.1 Alcune considerazioni sull'errore di compatibilità

L'errore di compatibilità può essere visto anche ricorrendo alla definizione al continuo della deformazione, che può essere pensata come soluzione corretta (di riferimento) da un punto di vista cinematico. Le deformazioni al continuo vengono derivate ipotizzando che ogni punto di un corpo 2D abbia due componenti di spostamento u_x e u_y , variabili da punto a punto del corpo stesso; le deformazioni associate sono elencate nelle espressioni (53) e rappresentate, con le rispettive (duali) tensioni, in Figura 16.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \quad (53)$$

Si pensi ora alla cinematica della trave come alla cinematica di un particolare continuo 2D; scegliendo $s \equiv x$, si ha infatti

$$\begin{cases} u_x[x, y] = u[s] - \vartheta[s]y \\ u_y[x, y] = v[s] \end{cases} \quad (54)$$

per cui, le equazioni (53), in ragione della definizione di deformazioni della trave (1c), si leggono come

$$\begin{cases} \varepsilon_x = u'[s] - \vartheta'[s]y \equiv \varepsilon - \chi y \\ \varepsilon_y = 0 \\ \gamma_{xy} = v'[s] - \vartheta[s] \equiv \gamma \end{cases} \quad (55)$$

L'errore di compatibilità è quindi evidente. Limitandosi al caso di una sezione rettangolare, non è mai possibile identificare la deformazione γ_{xy} elasticamente legata all'espressione di τ in Jourawski, e quindi a legge parabolica in y , con la stessa deformazione γ della trave, costante lungo y :

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau}{G} \equiv T \frac{6}{Gbh^3} (h^2/4 - y^2) \neq \gamma$$

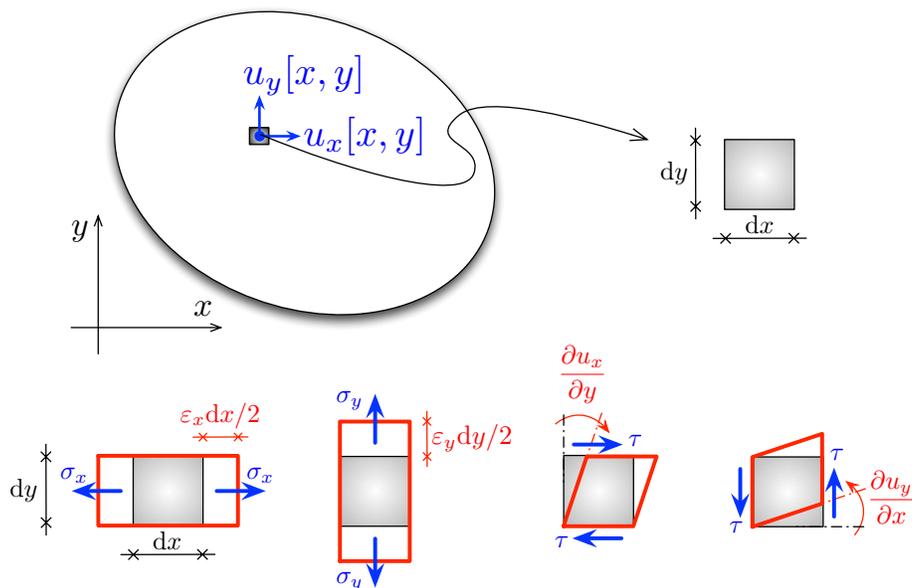


Figura 16: rappresentazione dello stato deformativo e tensionale in un continuo 2D.

Se, inoltre, si ammette che u_y sia costante lungo x (caso di scorrimento con rotazione di asse nulla), il contributo $\frac{\partial u_y}{\partial x}$ è zero, e forzando il legame elastico tra γ_{xy} e τ alla Jourawski (52), si deve dedurre che u_x varia in modo cubico lungo y :

$$\frac{6T}{Gbh^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) = \gamma_{xy} \equiv \frac{\partial u_x}{\partial y}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{6T}{Gbh^3} \left(\frac{h^2}{4}y - \frac{y^3}{3} \right) = u_x[y]$$

La forma di u_x è rappresentata in Figura 17, mentre la stessa componente di spostamento corrisponde, sulla base del modello di trave, a $(-\vartheta[s])y$. Da tale figura si evince l'errore di compatibilità nella misura della deformazione a scorrimento: anche con una definizione $\gamma = -\vartheta[s] \equiv \frac{T}{GA}$, comunque diversa – seppur di poco – da quella corretta da un punto di vista energetico $\gamma = \frac{T}{GA^*} \equiv \frac{6T}{5GA}$, si ottiene al più una ricostruzione media della deformazione γ_{xy} .

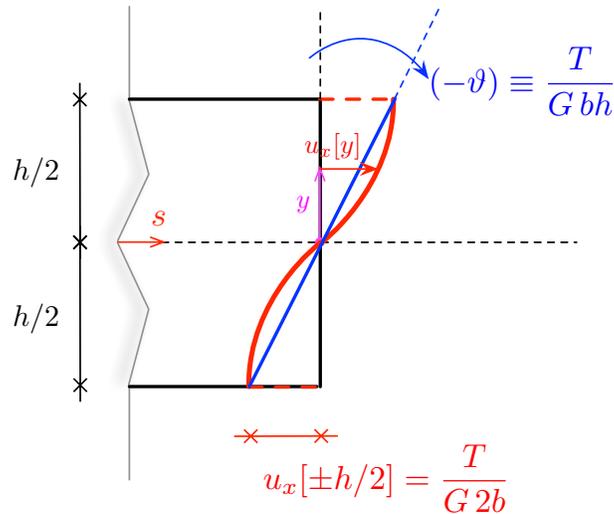


Figura 17: ricostruzione di una possibile deformazione a scorrimento lungo una sezione rettangolare.

4.2.2 Un esempio sulla valutazione dello stato tensionale

In riferimento all'esempio di trave doppiamente appoggiata di Figura 6, si valuti lo stato tensionale in termini di tensione assiale massima dovuta al momento, e tensionale tangenziale massima dovuta al taglio. Si ipotizzi una sezione rettangolare di dimensioni $b \times h$. I diagrammi della sollecitazione, ottenuti sulla base del modello di Euler-Bernoulli sono riportati in Figura 18

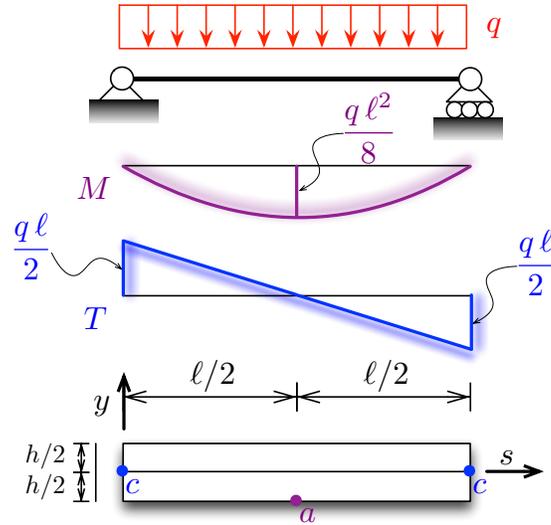


Figura 18: soluzione equilibrata per una trave doppiamente appoggiata.

Nell'ipotesi di resistenza a flessione, il punto a riportato in Figura 18 può essere considerato come il punto di innesco di una possibile rottura perché vi si raggiunge la tensione massima assiale: la rottura è in questo caso sub-verticale. Nell'ipotesi di resistenza a taglio, i punti c riportati nella stessa figura possono essere considerati di innesco di una possibile rottura sub-diagonale (cfr. Figura 19).

Le condizioni per cui si possa attivare una rottura piuttosto che l'altra si desumono direttamente dalla ricostruzione delle tensioni massime, cioè discutendo la disuguaglianza

$$\sigma_1 = \frac{q \ell^2 / 8}{b h^2 / 6} \geq \frac{q \ell / 2}{b h / 2} = \tau_{\max}$$

ovvero

$$\frac{4bh^2}{6\ell} \sigma_1 \geq \tau_{\max} \frac{bh}{3}$$

Pertanto, si può ipotizzare una rottura sub-verticale nelle zone basse della sezione di mezzeria (punto a) se $\sigma_1 \geq \tau_{\max}$ e questo avviene quando la trave è sufficientemente “snella”, cioè quanto più $\ell \geq h$. Al contrario, si può ipotizzare una rottura sub-diagonale nelle zone centrali delle sezioni ai due estremi della trave (punti c) per travi sufficiente “tozze”, cioè quanto più $\ell \leq h$.

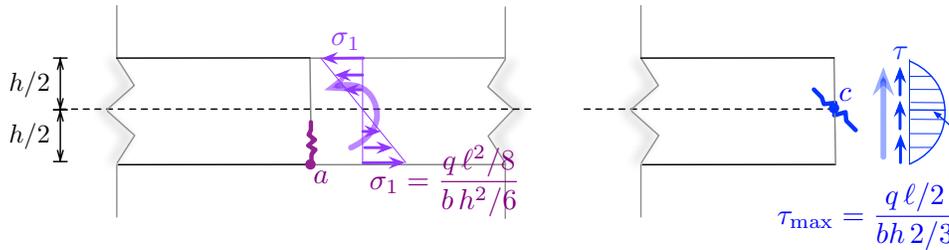


Figura 19: ipotesi di rotture per distribuzione di tensione nelle sezioni più sollecitate.

4.2.3 Generalizzazione dello stato tensionale di Jourawski

La trattazione di Jourawski che porta alla equazione (51) è identica anche se lo spessore $b[\bar{y}]$ della corda che partiziona la sezione in un'area $A[\bar{y}]$ è inclinata in modo generico rispetto agli assi baricentrici (cfr. Figura 20). Ciò è legato al fatto che vengono messe in equilibrio le tensioni τ disposte secondo l'asse s della trave (cfr. Figura 21).

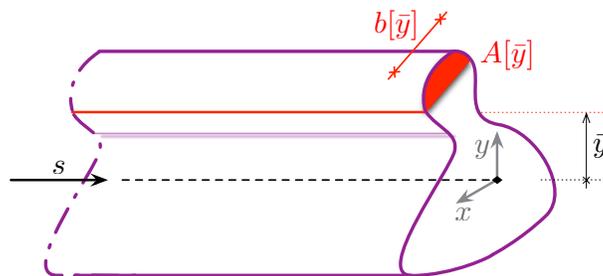


Figura 20: sezionamento per la trattazione di Jourawski con un'inclinazione della corda $b[\bar{y}]$ generica.

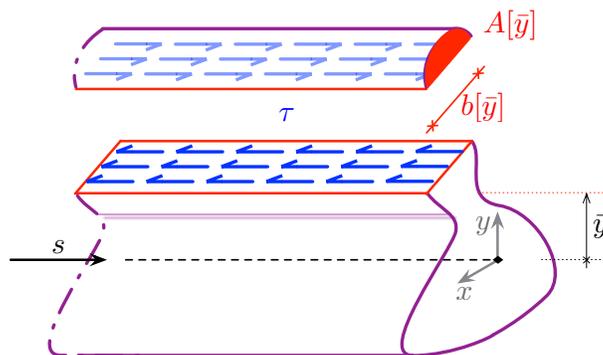


Figura 21: distribuzione delle τ lungo s in un sezionamento con un'inclinazione della corda $b[\bar{y}]$ generica.

In modo analogo, risulta che se ad una certa altezza \bar{y} della sezione convergono, formando uno spigolo, due tratti rettangolari di spessore diverso, b_1 e b_2 , la condizione di equilibrio (50) attesta una rapporto τb costante perché viene univocamente fissata $A[\bar{y}]$. Infatti, tale equazione può essere scritta:

$$(\tau[\bar{y}]b[\bar{y}]) = \frac{TS[\bar{y}]}{J} = \text{cost.} \tag{56}$$

Osservando come si dispongono le tensioni τ , coerentemente cioè all'equilibrio che la trattazione di Jourawki impone lungo l'asse s della trave, l'equazione (56) assume il significato di una condizione di "flusso" tra le tensioni stesse che nel caso mostrato in Figura 22 particularizza la (56) in

$$\tau_1 b_1 = \tau_2 b_2$$

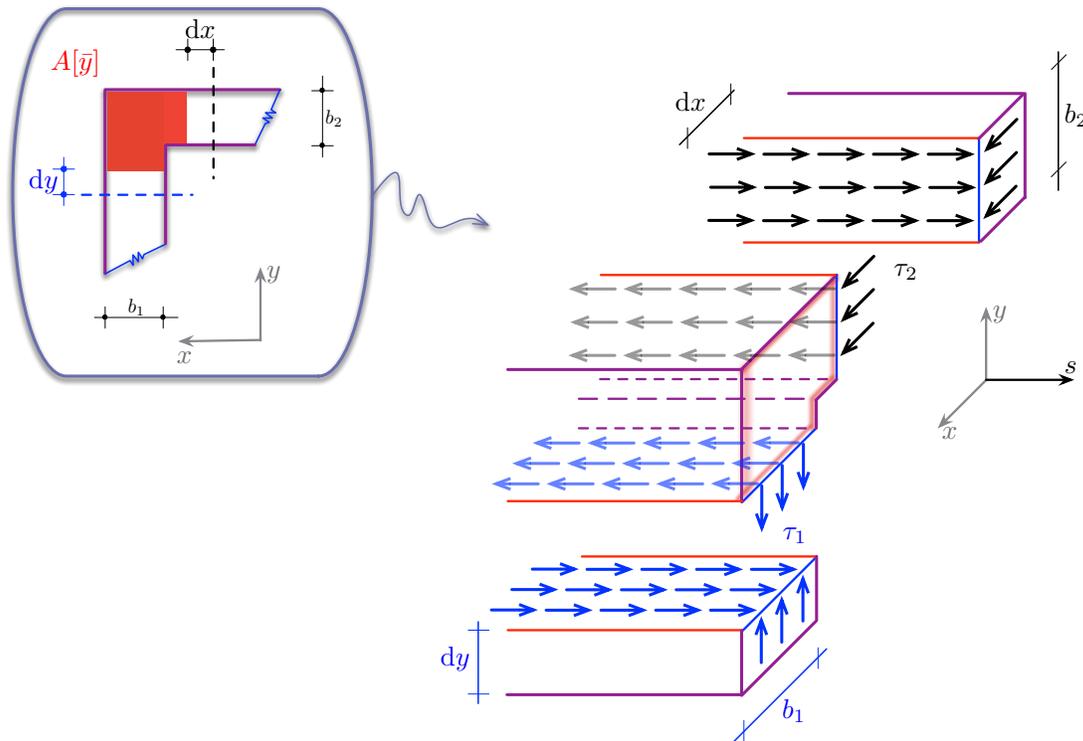


Figura 22: distribuzione delle τ nell'intorno di uno spigolo di una sezione, in cui convergono due tratti rettangolari di spessore diverso, b_1 e b_2 .

Riferimenti bibliografici

- [1] Bernardini D. “Statica”. CittàStudiEdizioni, Roma 2009.
- [2] Comi C, Corradi Dell’Acqua L. “Introduzione alla meccanica strutturale”. McGraw-Hill, Milano 2003.
- [3] Timoshenko SP. “History of Strength of Materials”. McGraw-Hill, Stanford (CA) 1953.
- [4] Kurrer KE. “The History of the Theory of Structures: from arch analysis to computational mechanics”. Ernst&Sohn - A Wiley Company, Berlin 2008.
- [5] Turco E, Casciaro R, Bilotta F, Porco F, Formica G. “Scienza della Costruzioni”. McGraw-Hill, Roma 2004.