

# Esercizi di Statica

*Corso dell'A.A. 2003/2004 – titolare prof. G. A. Porco*

---

*a cura di*

Giacinto A. PORCO  
Giovanni FORMICA

# Indice

<b>1</b>	<b>Calcolo delle reazioni vincolari</b>	<b>2</b>
1.1	Equazioni cardinali della statica . . . . .	2
1.1.1	Esempio 1 . . . . .	2
1.1.2	Esempio 2 . . . . .	5
1.1.3	Esempio 3 . . . . .	7
1.1.4	Esempio 4 . . . . .	10
1.1.5	Esempio 5 . . . . .	13
1.1.6	Esempio 6 . . . . .	15
1.1.7	Esempio 7 . . . . .	17
1.1.8	Esempio 8 . . . . .	19
1.2	Principio dei lavori virtuali . . . . .	21
1.2.1	Esempio 1 . . . . .	21
1.2.2	Esempio 2 . . . . .	22
1.2.3	Esempio 3 . . . . .	25
1.2.4	Esempio 4 . . . . .	25
1.2.5	Esempio 5 . . . . .	28
<b>2</b>	<b>Calcolo dei diagrammi della sollecitazione</b>	<b>34</b>
2.1	Procedimento diretto . . . . .	34
2.1.1	Esempio 1 . . . . .	34
2.1.2	Esempio 2 . . . . .	37
2.1.3	Esempio 3 . . . . .	39
2.1.4	Esempio 4 . . . . .	42
2.1.5	Esempio 5 . . . . .	45
2.1.6	Esempio 6 . . . . .	49
2.1.7	Esempio 7 . . . . .	51
2.2	Procedimento grafico . . . . .	53
2.2.1	Esempio 1 . . . . .	53
2.2.2	Esempio 2 . . . . .	55
2.2.3	Esempio 3 . . . . .	57
2.2.4	Esempio 4 . . . . .	59

# Capitolo 1

## Calcolo delle reazioni vincolari

### 1.1 Equazioni cardinali della statica

#### 1.1.1 Esempio 1

Calcolare per la struttura isostatica di Figura 1.1 le reazioni dei vincoli presenti.

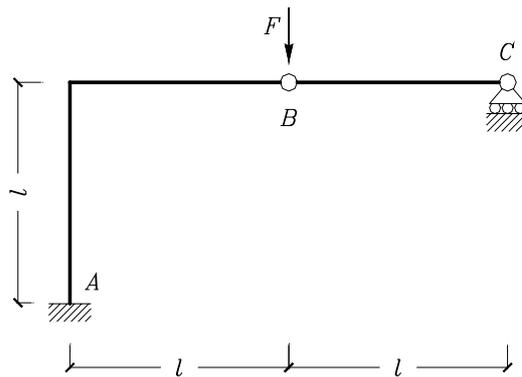


Figura 1.1: schema geometrico.

Prima di procedere con il calcolo delle reazioni vincolari è necessario verificare se il problema è o no risolvibile, valutando cioè se la struttura è o meno isostatica. I vincoli presenti hanno grado pari a 6, tanti quanti sono i gradi di libertà di un sistema di due tratti rigidi nel piano. L'isostaticità è legata quindi alla possibilità che la struttura ammetta o meno un cinematismo. In particolare, la struttura si compone di due sole aste per cui ammette un cinematismo se e solo se i due centri di rotazione assoluta e quello relativo sono allineati (*teorema 1 delle catene cinematiche*). Il tratto  $A - B$  non ha centro di rotazione essendo collegato a terra tramite incastro; pertanto, la caratterizzazione cinematica dell'intera struttura si riconduce a quella del solo tratto  $B - C$ , in cui la cerniera in  $B$  può pensarsi messa a terra. Questa sotto-struttura è costituita da un unico corpo rigido che, non possedendo un unico centro assoluto, è isostatica (*teorema 0 delle catene cinematiche*). L'intera struttura non ammette quindi alcun cinematismo.

Si può allora svincolare la struttura, così come indicato in Figura 1.2, per scegliere di calcolare le reazioni esplicitate da tutti i vincoli presenti. Come convenzione sui segni si faccia riferimento a quella riportata nella stessa Figura 1.2.

Si noti che per la presenza della forza concentrata  $F$  nella cerniera in  $B$ , le reazioni di tale cerniera possono essere dirette lungo direzioni differenti purchè in essa sia verificato l'equilibrio. Pertanto, posto che la cerniera interna espliciti le reazioni orizzontali e verticali così come riportato in Figura 1.2, l'equilibrio in  $B$  impone che sia:

$$\begin{cases} 0 = -V'_B - V''_B + F \\ 0 = H'_B - H''_B \end{cases} \quad (1.1a)$$

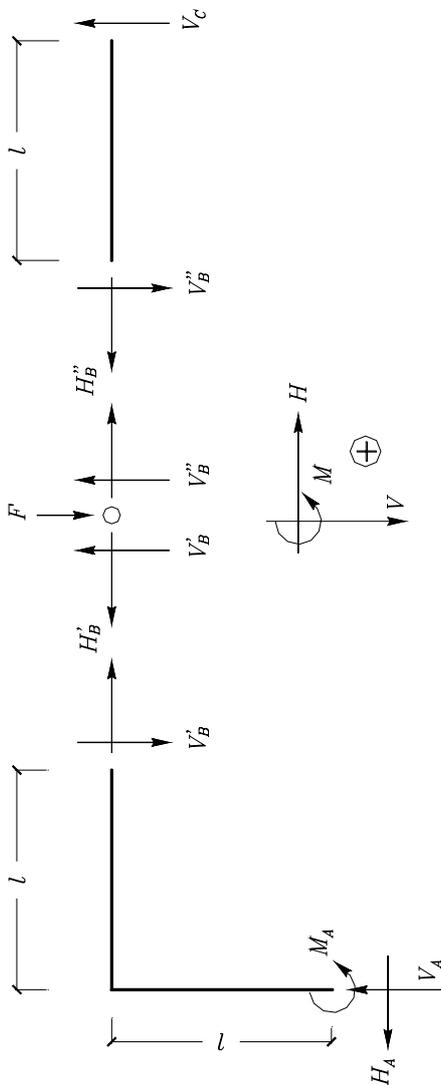


Figura 1.2: schema svincolato.

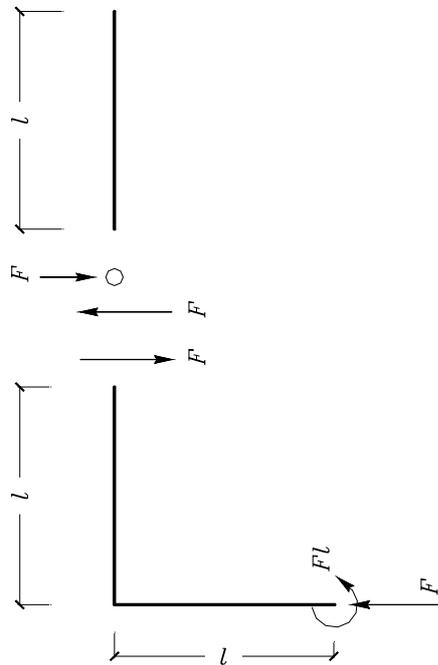


Figura 1.3: soluzione.

L'equilibrio, invece, dei tratti  $A - B$  e  $B - C$  richiede che siano verificate 2 sistemi di 3 equazioni ciascuno, rispettivamente:

$$\begin{cases} 0 = -H_A + H'_B \\ 0 = -V_A + V'_B \\ 0 = M_A - H_A l - V_A l \end{cases} \quad (1.1b)$$

$$\begin{cases} 0 = -H''_B \\ 0 = V''_B - V_C \\ 0 = V''_B l \end{cases} \quad (1.1c)$$

L'insieme delle condizioni (1.1) costituisce quindi un sistema di 7 equazioni in 7 incognite, le quali valgono

$$\begin{array}{lll} H_A = 0 & H'_B = 0 & V_C = 0 \\ V_A = F & H''_B = 0 & V''_B = 0 \\ M_A = Fl & V'_B = F & \end{array} \quad (1.2)$$

così come riportato in Figura 1.3.

### 1.1.2 Esempio 2

Calcolare per la struttura isostatica di Figura 1.4 le reazioni dei vincoli presenti.

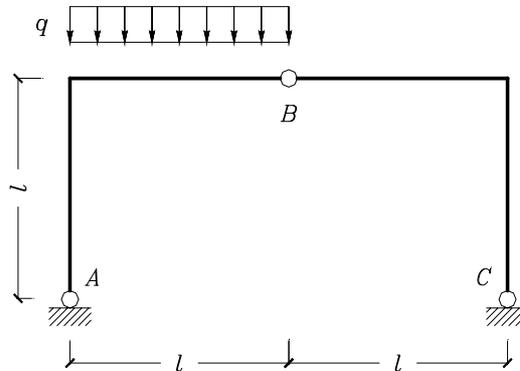


Figura 1.4: schema geometrico.

Anche in questo caso, prima di procedere è necessario verificare l'isotaticità della struttura. Il grado di vincolo è pari ancora ai gradi di libertà della struttura, cioè 6. L'assenza di cinematismo invece è garantita dal fatto che le tre cerniere in  $A$ ,  $C$  e  $B$  individuano rispettivamente due centri di rotazione assoluta e un centro di rotazione relativa che non sono tra loro allineati, come richiesto dal teorema 1 delle catene cinematiche. È questo uno schema classico di strutture costituite da due sole aste vincolate sia esternamente sia internamente da sole cerniere e prende il nome generico di *arco a tre cerniere*.

Per il calcolo delle reazioni vincolari si segua il procedimento adottato nel precedente paragrafo: le reazioni vincolari sono quelle rappresentate in Figura 1.5 e seguono la convenzione sui segni qui indicata.

I gruppi di equazioni sono ancora definiti imponendo l'equilibrio dell'intero tratto  $A - B$

$$\begin{cases} 0 = -H_A + H_B \\ 0 = -V_A + V_B + ql \\ 0 = ql^2/2 - H_A l - V_A l \end{cases} \quad (1.3a)$$

e quello dell'intero tratto  $C - D$

$$\begin{cases} 0 = -H_B + H_C \\ 0 = -V_B - V_C \\ 0 = -V_B l + H_B l \end{cases} \quad (1.3b)$$

Si noti che non si è considerato l'equilibrio in  $B$ , in quanto la cerniera non è caricata e quindi esplica nelle sezioni adiacenti reazioni uguali e contrarie.

L'insieme delle condizioni (1.3) costituisce un sistema di 6 equazioni in 6 incognite, che ammette soluzione unica in virtù dell'isotaticità del problema da cui deriva. Si

ottiene:

$$\begin{array}{lll}
 H_A = -ql/4 & H_B = -ql/4 & H_C = -ql/4 \\
 V_A = 3ql/4 & V_B = -ql/4 & V_C = ql/4
 \end{array}
 \quad (1.4)$$

Questi risultati sono riportati in Figura 1.6.

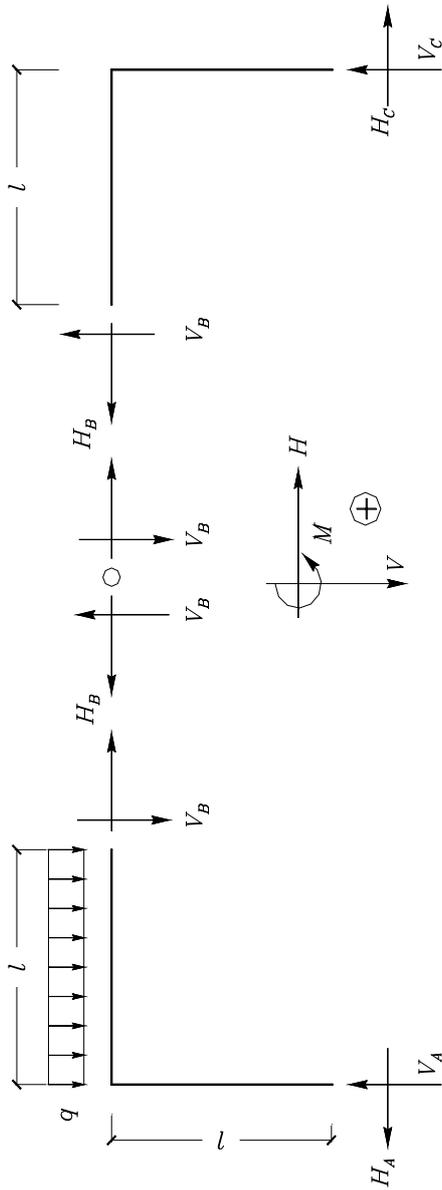


Figura 1.5: schema svincolato.

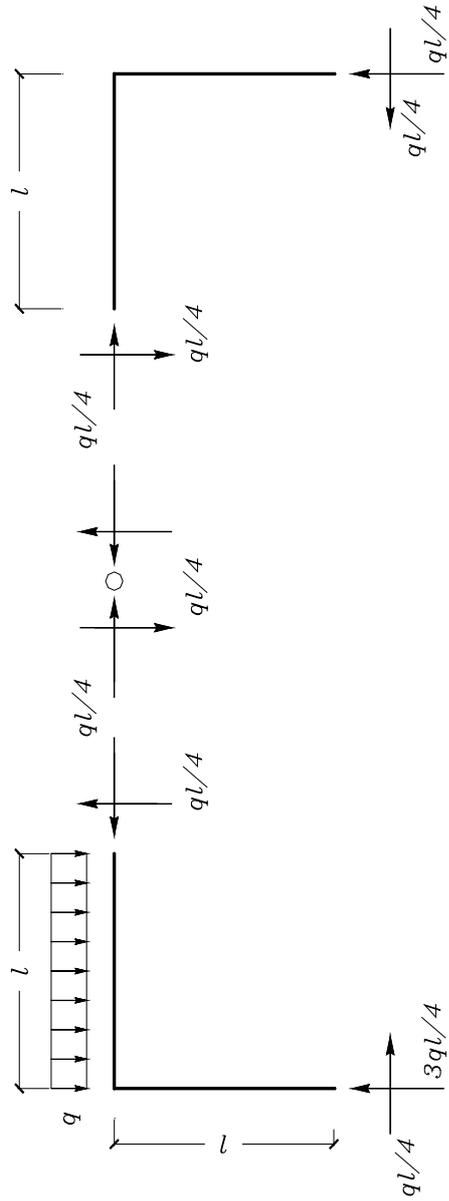


Figura 1.6: soluzione.

### 1.1.3 Esempio 3

Calcolare per la struttura isostatica di Figura 1.7 le reazioni dei vincoli presenti.

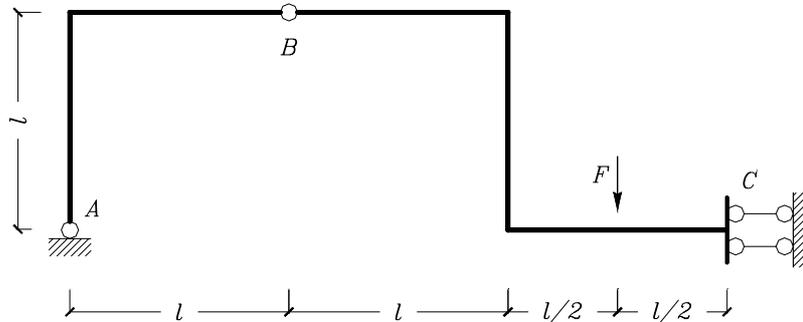


Figura 1.7: schema geometrico.

Come per le precedenti, anche la struttura in esame è isostatica. Infatti, i gradi di libertà sono ancora 6, tanti quanti sono i gradi di vincolo; non esiste, inoltre, alcun cinematismo e quindi labilità poichè, sempre per il teorema 1 delle catene cinematiche, i centri assoluto (cerniera in  $A$ ) e relativo (cerniera in  $B$ ) non sono allineati col centro definito dal doppio pendolo in  $C$  il quale è un centro improprio con direzione orizzontale.

Svincolando, quindi, la struttura esplicitando le reazioni dei vincoli così come riportato in Figura 1.8 si possono scrivere le seguenti equazioni di equilibrio, imposte rispettivamente nei tratti  $A - B$  e  $B - C$ :

$$\begin{cases} 0 = -H_A + H_B \\ 0 = -V_A + V_B \\ 0 = -H_A l - V_A l \end{cases} \quad (1.5a)$$

$$\begin{cases} 0 = -H_B + H_C \\ 0 = -V_B + F \\ 0 = H_C l + M_C - 3Fl/2 \end{cases} \quad (1.5b)$$

Per la convenzione sui segni delle forze in gioco si è adottata quella riportata in Figura 1.8.

Il sistema (1.5) è quindi risolto con soluzione:

$$\begin{aligned} H_A = -F & & H_B = -F & & H_C = -F \\ V_A = F & & V_B = F & & V_C = 5Fl/2 \end{aligned} \quad (1.6)$$

Questi risultati sono riportati in Figura 1.9.

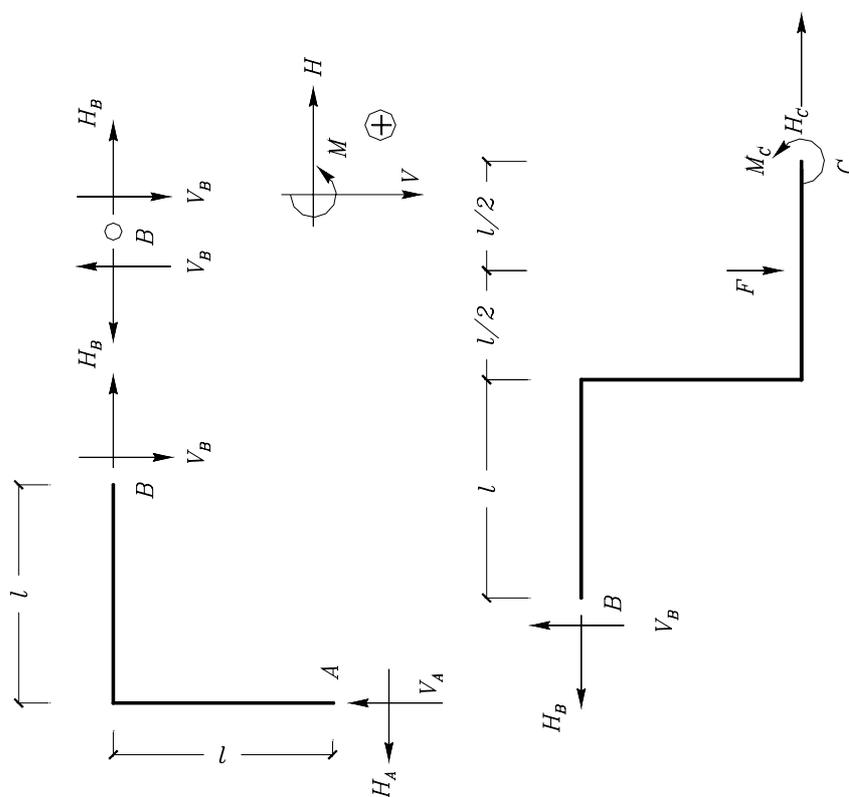


Figura 1.8: schema svincolato.

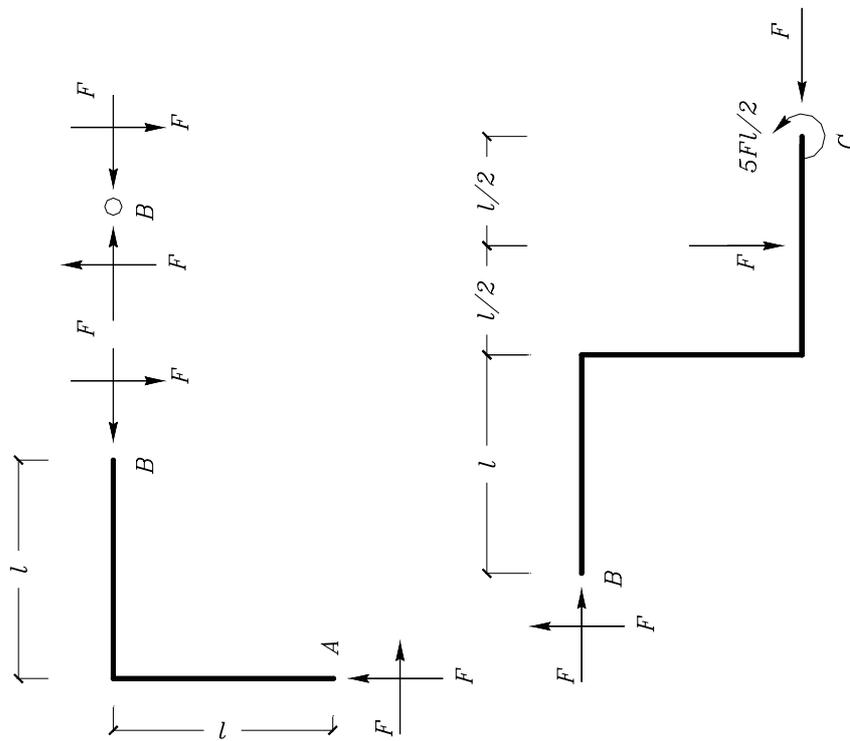


Figura 1.9: soluzione.

### 1.1.4 Esempio 4

Calcolare per la struttura isostatica di Figura 1.10 le reazioni dei vincoli presenti.

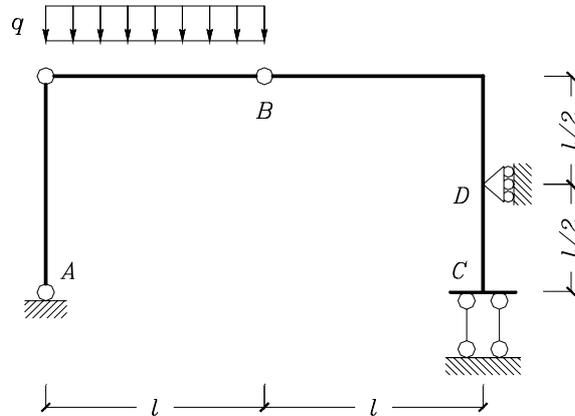


Figura 1.10: schema geometrico.

La struttura ha gradi di libertà pari a 9, essendo costituita da 3 tratti rigidi. I gradi di vincolo sono anch'essi 9, perchè le 3 cerniere in  $A$ ,  $B$  e  $C$  bloccano 6 spostamenti possibili; il carrello in  $D$  e il doppio pendolo in  $E$  rispettivamente 1 e 2. Per l'isostaticità della struttura è sufficiente quindi verificare l'assenza di cinematismi. I cinematismi dell'intera struttura possono essere ricondotti a quelli dei soli tratti  $A - B$  e  $B - C$ , in cui  $C$  è pensabile vincolato a terra non avendo il tratto  $C - E$  alcun centro di rotazione assoluto. Questa sotto-struttura è costituita da due sole aste e corrisponde ad un arco a tre cerniere; pertanto, l'intera struttura non è sede di cinematismo e cioè isostatica.

Per il calcolo delle reazioni dei vincoli si impostano condizioni di equilibrio nei tratti  $A - B$ ,  $B - C$  e  $C - E$  separatamente. Si noti che si trascura l'equilibrio della cerniera in  $C$ , avendo riconosciuto che questa, non caricata da forze esterne, esplica, per quanto visto negli esempi precedenti, reazioni uguali e contrarie sui tratti da essa collegati. Queste reazioni vengono indicate con  $H_C$  e  $V_C$ .

Le condizioni di equilibrio rispettivamente nei tratti  $A - B$ ,  $B - C$  e  $C - E$  possono quindi esprimersi:

$$\begin{cases} 0 = -H_A + H_B \\ 0 = -V_A + V_B \\ 0 = -H_B l \end{cases} \quad (1.7a)$$

$$\begin{cases} 0 = -H_B + H_C \\ 0 = -V_B - V_C + ql \\ 0 = V_C l - ql^2/2 \end{cases} \quad (1.7b)$$

$$\begin{cases} 0 = -H_C + H_D \\ 0 = V_C - V_E \\ 0 = H_D l/2 + V_E l + M_E \end{cases} \quad (1.7c)$$

in cui le quantità presenti hanno i versi così come indicato nello schema svincolato in Figura 1.11.

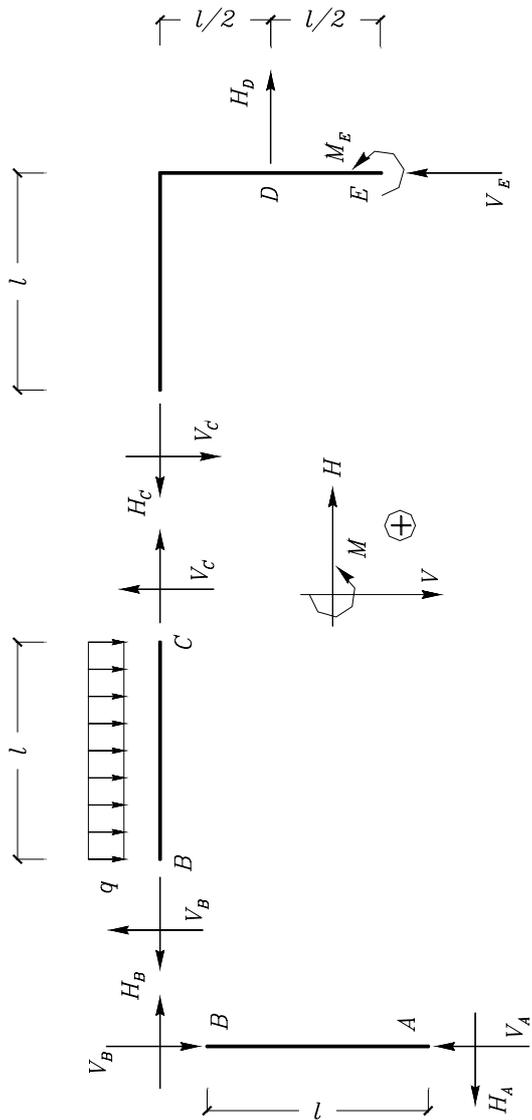


Figura 1.11: schema svincolato.

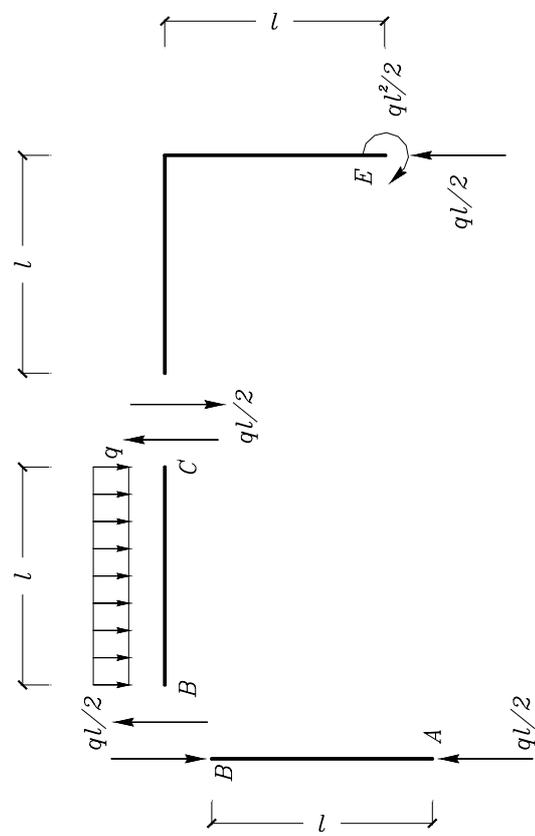


Figura 1.12: soluzione.

La soluzione del sistema (1.7) risulta:

$$\begin{array}{lll} H_A = 0 & & H_D = 0 \\ V_A = ql/2 & H_C = 0 & V_E = ql/2 \\ H_B = 0 & V_C = ql/2 & M_E = -ql^2/2 \\ V_B = ql/2 & & \end{array} \quad (1.8)$$

così come riportato in Figura 1.12.

### 1.1.5 Esempio 5

Calcolare per la struttura isostatica di Figura 1.13 le reazioni dei vincoli presenti.

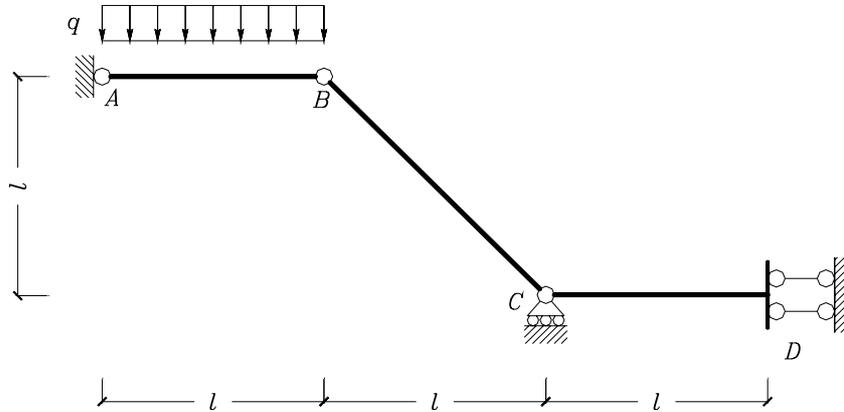


Figura 1.13: schema geometrico.

Anche questa struttura ha gradi di libertà pari a 9, così come i gradi di vincolo in quanto le tre cerniere in  $A$ , in  $B$  e in  $C$  bloccano ciascuna 2 spostamenti, più 1 del carrello in  $C$  e due del doppio pendolo in  $D$ . La struttura, inoltre, è isostatica poichè i vincoli esterni presenti sul tratto  $C - D$  non identificano un unico centro di rotazione assoluta e quindi è possibile immaginare di mettere a terra la cerniera in  $C$ , trascurando l'intero tratto  $C - D$ ; la restante parte della struttura risulta un arco a tre cerniere non allineate e pertanto isostatico.

Si svincoli allora la struttura secondo le modalità riportate in Figura 1.14. Le incognite vincolari sono in tutto 11, compresa in particolare la reazione verticale  $R_C$  del carrello esterno in  $C$  (v. Figura 1.14): la cerniera in questo punto è pertanto trattata come una cerniera caricata.

Come condizioni di equilibrio è possibile scegliere le 3 relative ad ognuno dei corpi  $A - B$ ,  $B - C$  e  $B - C$  presi separatamente:

$$\begin{cases} 0 = -H_A + H_B \\ 0 = -V_A + V_B + ql \\ 0 = -V_B l - ql^2/2 \end{cases} \quad (1.9a)$$

$$\begin{cases} 0 = -H_B + H'_C \\ 0 = -V_B + V'_C \\ 0 = -V'_C l + H'_C l \end{cases} \quad (1.9b)$$

$$\begin{cases} 0 = -H''_C + H_D \\ 0 = V''_C \\ 0 = M_D \end{cases} \quad (1.9c)$$

A queste vanno aggiunte le 2 equazioni di equilibrio della cerniera  $C$  che è stata isolata dal resto della struttura:

$$\begin{cases} 0 = -H'_C + H''_C \\ 0 = -V'_C - V''_C - R_C \end{cases} \quad (1.9d)$$

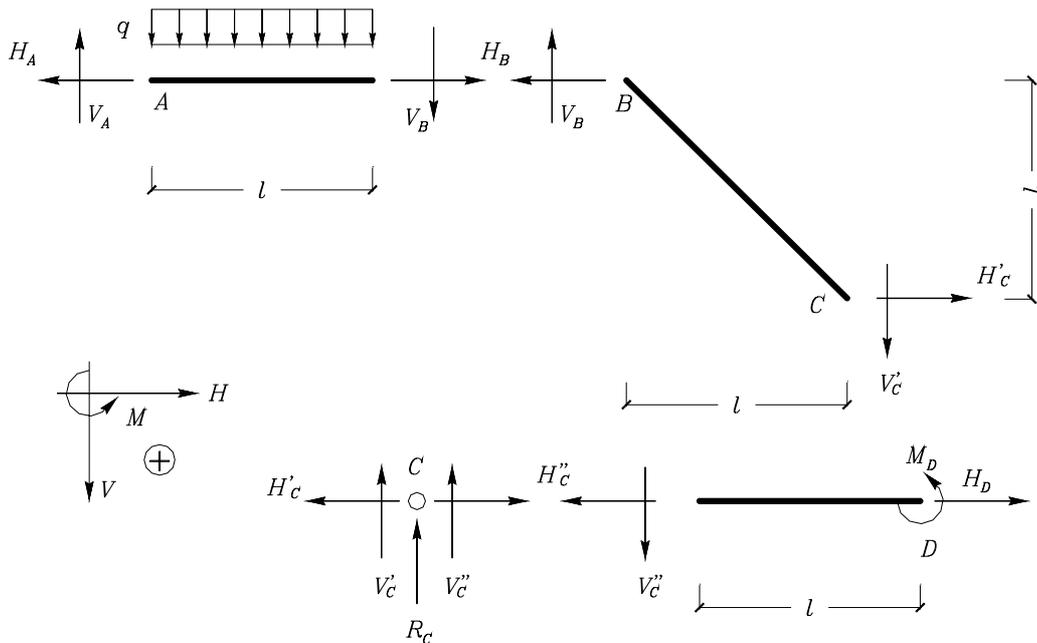


Figura 1.14: schema svincolato.

Le condizioni (1.9) vengono quindi verificate per i seguenti valori (v. Figura 1.15):

$$\begin{array}{lll} H_A = -ql/2 & H'_C = -ql/2 & H''_C = -ql/2 \\ V_A = ql/2 & V'_C = -ql/2 & V''_C = 0 \\ H_B = -ql/2 & R_C = ql/2 & H_D = -ql/2 \\ V_B = -ql/2 & & M_D = 0 \end{array} \quad (1.10)$$

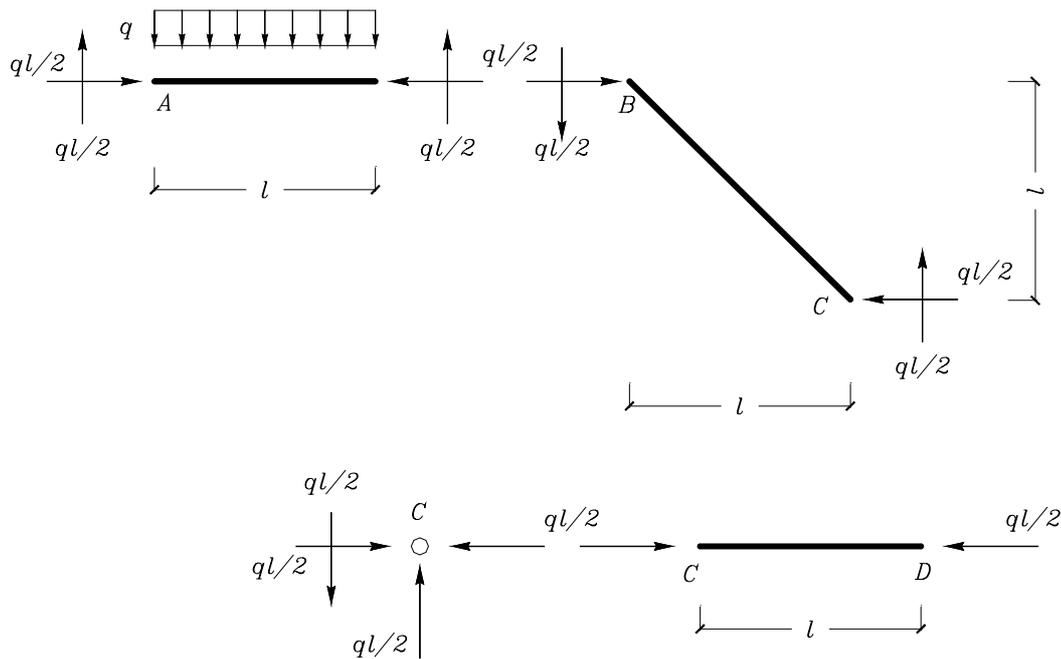


Figura 1.15: soluzione.

### 1.1.6 Esempio 6

Calcolare per la struttura isostatica di Figura 1.16 le reazioni dei vincoli presenti.

La struttura possiede 6 gradi di libertà e altrettanti gradi di vincolo. È isostatica perchè il centro relativo  $c_{12}$  del doppio pendolo in  $B$  è improprio con direzione orizzontale, mentre i centri assoluti  $c_1$  in  $A$  e  $c_2$  in  $C$  sono allineati lungo la loro congiungente e quindi non sono allineati con  $c_{12}$ . La struttura è allora svincolata così come riportato in Figura 1.17, da cui è possibile scrivere i due sistemi di equilibrio relativi ai due corpi  $A - B$  e  $B - C$ :

$$\begin{cases} 0 = -H_A + H_B \\ 0 = -V_A + ql \\ 0 = -H_B l + M_B - ql^2/2 \end{cases} \quad (1.11a)$$

$$\begin{cases} 0 = -H_B + H_C \\ 0 = -V_C \\ 0 = H_B 2l - M_B \end{cases} \quad (1.11b)$$

La soluzione vale, pertanto,

$$\begin{aligned} H_A &= ql/2 & M_B &= ql^2 \\ V_A &= ql & H_C &= ql/2 \\ H_B &= ql/2 & V_C &= 0 \end{aligned} \quad (1.12)$$

come riportato in Figura 1.18.

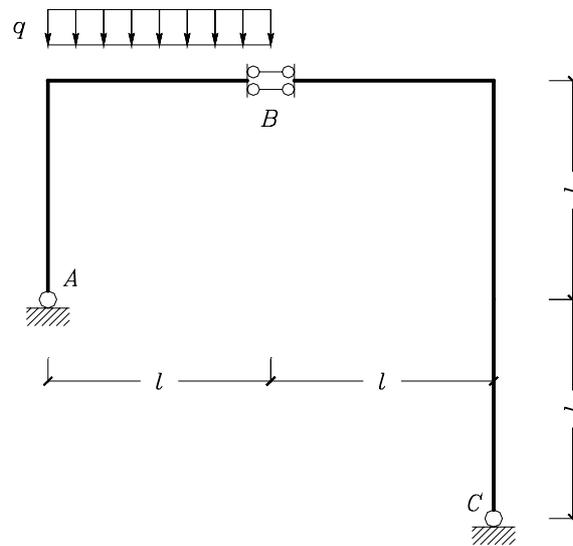


Figura 1.16: schema geometrico.

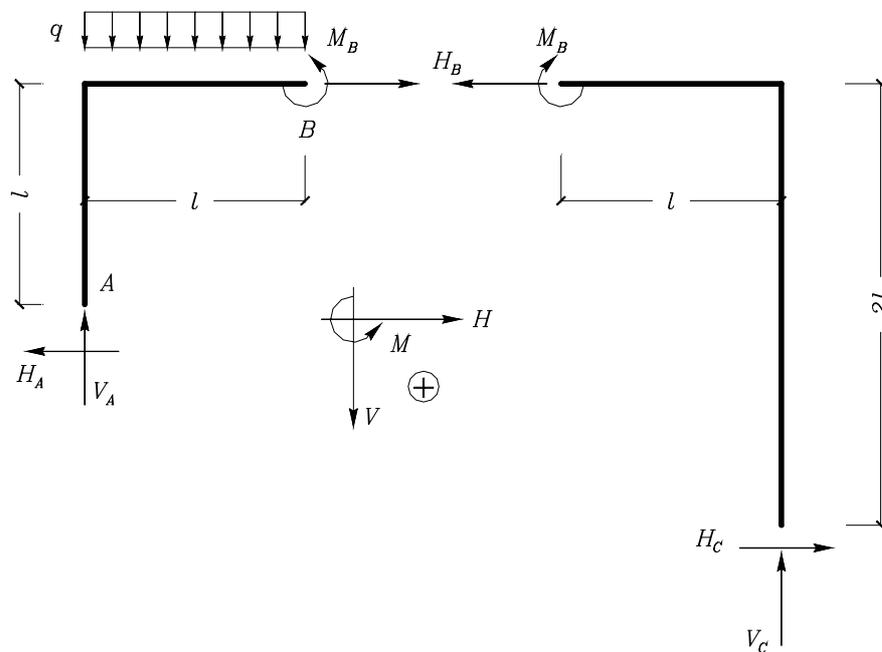


Figura 1.17: schema svincolato.

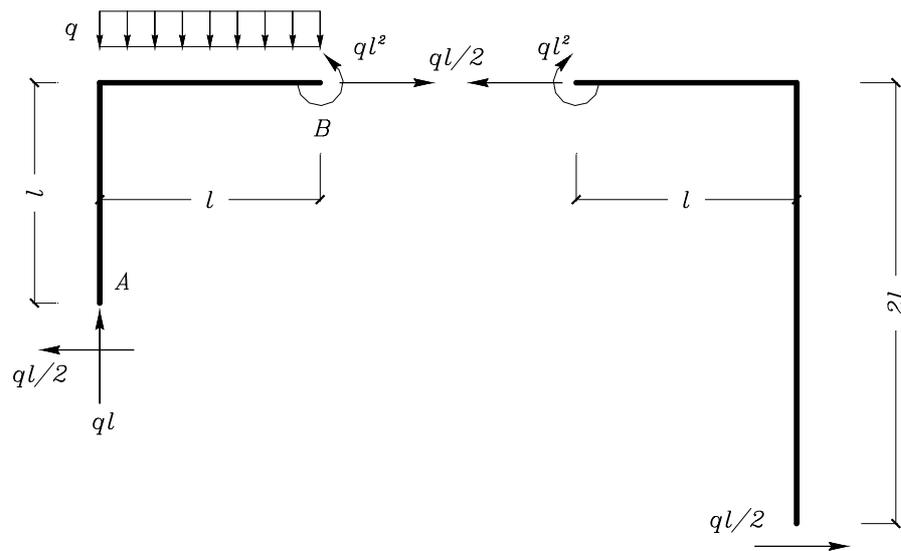


Figura 1.18: soluzione.

### 1.1.7 Esempio 7

Calcolare per la struttura isostatica di Figura 1.19 le reazioni dei vincoli presenti.

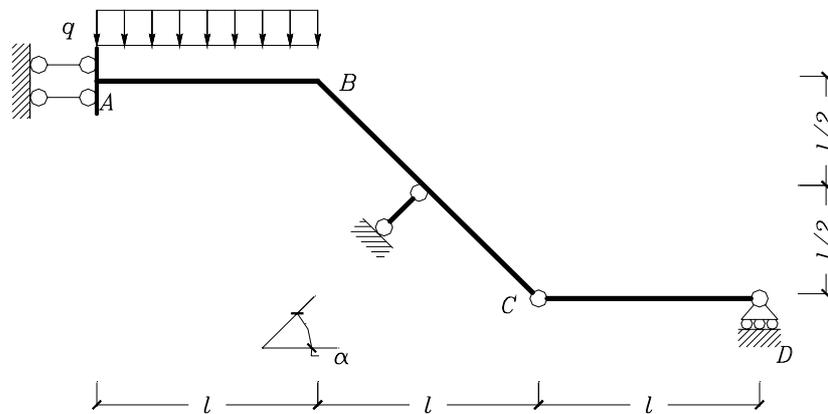


Figura 1.19: schema geometrico.

I gradi di vincolo della struttura in esame sono ancora pari a quelli di libertà. L'isostaticità invece è garantita dal fatto che nel tratto  $A - B - C$  non è possibile identificare un unico centro di rotazione assoluto e quindi l'isostaticità è garantita osservando il solo corpo  $C - D$ , pensando vincolata a terra la cerniera interna in  $C$ .

Svincolata allora la struttura (v. Figura 1.20) si possono scrivere le condizioni di

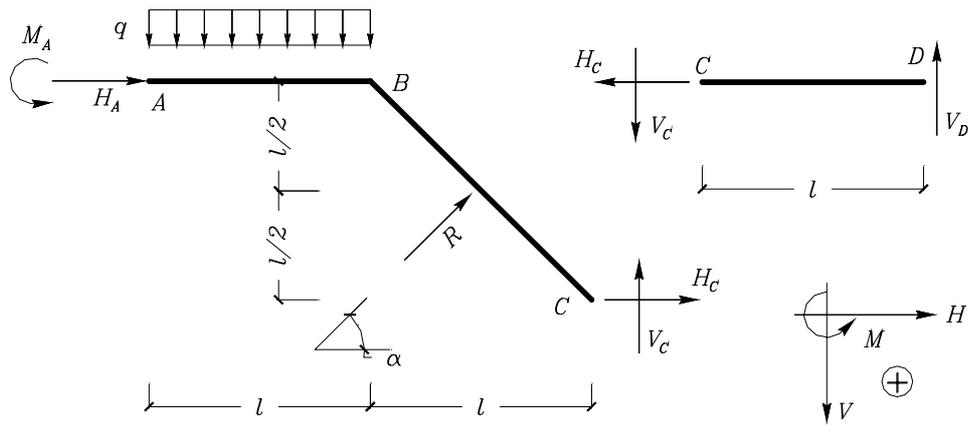


Figura 1.20: schema svincolato.

equilibrio sui due corpi separatamente:

$$\begin{cases} 0 = H_A + H_C + R \cos \alpha \\ 0 = -V_C - R \sin \alpha + ql \\ 0 = -H_A l + M_A - R \cos \alpha l/2 - R \sin \alpha l/2 + 3ql^2/2 \end{cases} \quad (1.13a)$$

$$\begin{cases} 0 = -H_C \\ 0 = -V_C + V_D \\ 0 = V_D l \end{cases} \quad (1.13b)$$

e ottenere quindi la soluzione cercata (v. Figura 1.20):

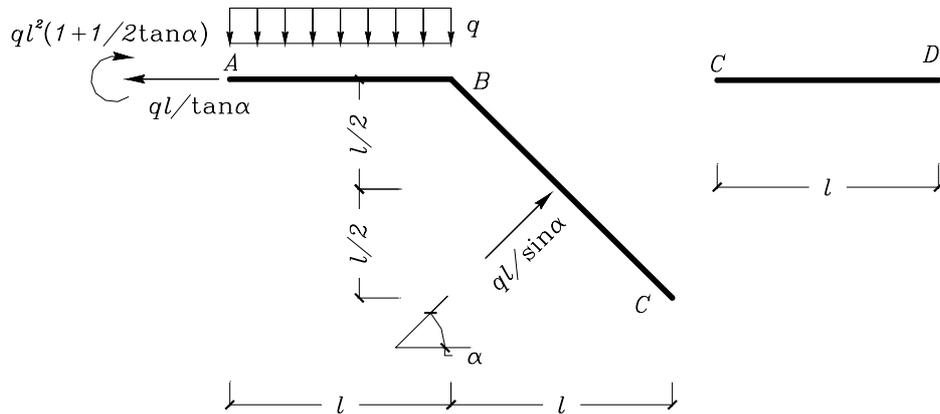


Figura 1.21: soluzione.

$$\begin{aligned} H_A &= -ql/\tan \alpha & V_D &= 0 \\ M_A &= -ql^2(1 + 1/2 \tan \alpha) & H_C &= 0 \\ R &= ql/\sin \alpha & V_C &= 0 \end{aligned} \quad (1.14)$$

### 1.1.8 Esempio 8

Calcolare per la struttura isostatica di Figura 1.22 le reazioni dei vincoli presenti.

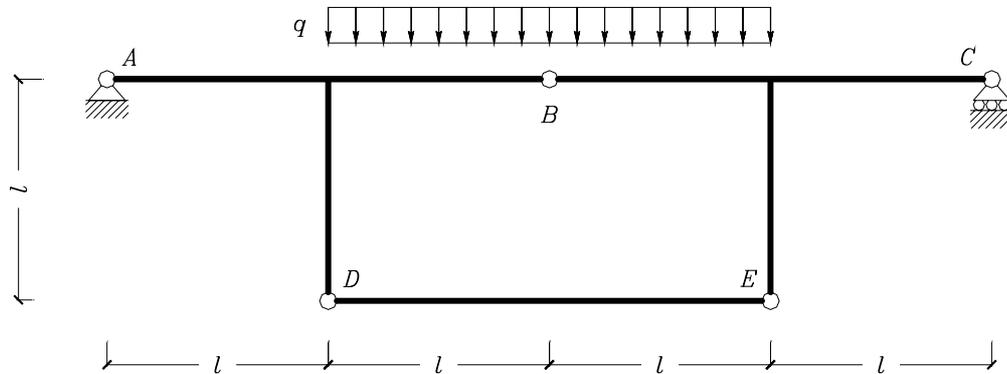


Figura 1.22: schema geometrico.

È questo il tipico esempio di struttura chiusa e vincolata esternamente da 3 gradi di vincolo. La struttura è quindi *esteranamente isostatica* e lo è anche internamente quando i vincoli interni introducono tre gradi di sconnessione in un corpo definito da un tratto continuo chiuso e non definiscono un centro relativo in comune. Nel caso in esame poichè si hanno tre cerniere interne, in  $B$ ,  $D$ , ed  $E$ , che definiscono dei centri relativi non sono allineati, allora la struttura è isostatica.

Sulla base dell'esplicitazione delle reazioni vincolari fatta in Figura 1.23 è possibile scrivere le condizioni di equilibrio nei tre corpi  $A - D - B$ ,  $B - E - C$  ed  $D - E$  rispettivamente

$$\begin{cases} 0 = H_A + H_B + H_D \\ 0 = -V_A + V_B + V_E + ql \\ 0 = H_D l - V_D l - V_B 2l - 3ql^2/2 \end{cases} \quad (1.15a)$$

$$\begin{cases} 0 = -H_B + H_E \\ 0 = -V_B - V_C - V_E + ql \\ 0 = V_C 2l + H_E l + V_E l - ql^2/2 \end{cases} \quad (1.15b)$$

$$\begin{cases} 0 = -H_D - H_E \\ 0 = -V_D + V_E \\ 0 = -V_E l \end{cases} \quad (1.15c)$$

Dalle (1.15) si ottiene (v. anche Figura 1.24):

$$\begin{array}{lll} H_A = -ql/\tan\alpha & V_D = 0 & H_D = 0 \\ M_A = -ql^2(1 + 1/2 \tan\alpha) & H_C = 0 & V_D = 0 \\ R = ql/\sin\alpha & V_C = 0 & V_E = 0 \end{array} \quad (1.16)$$

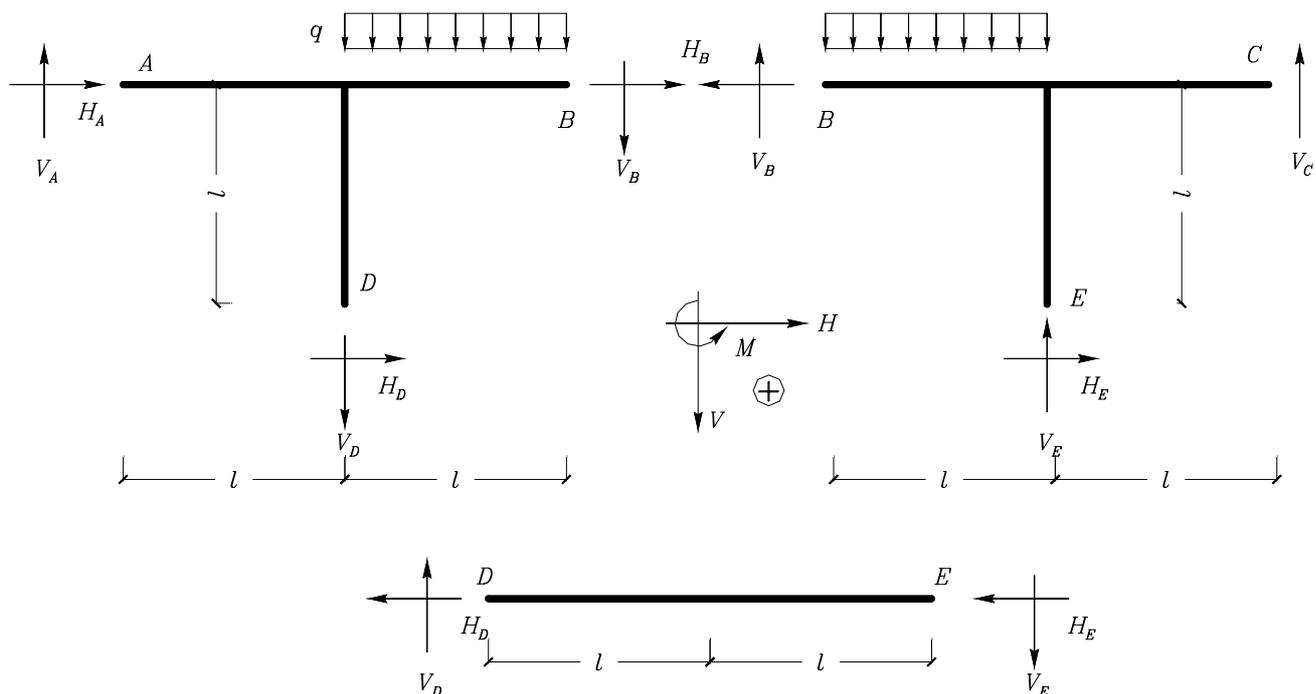


Figura 1.23: schema svincolato.

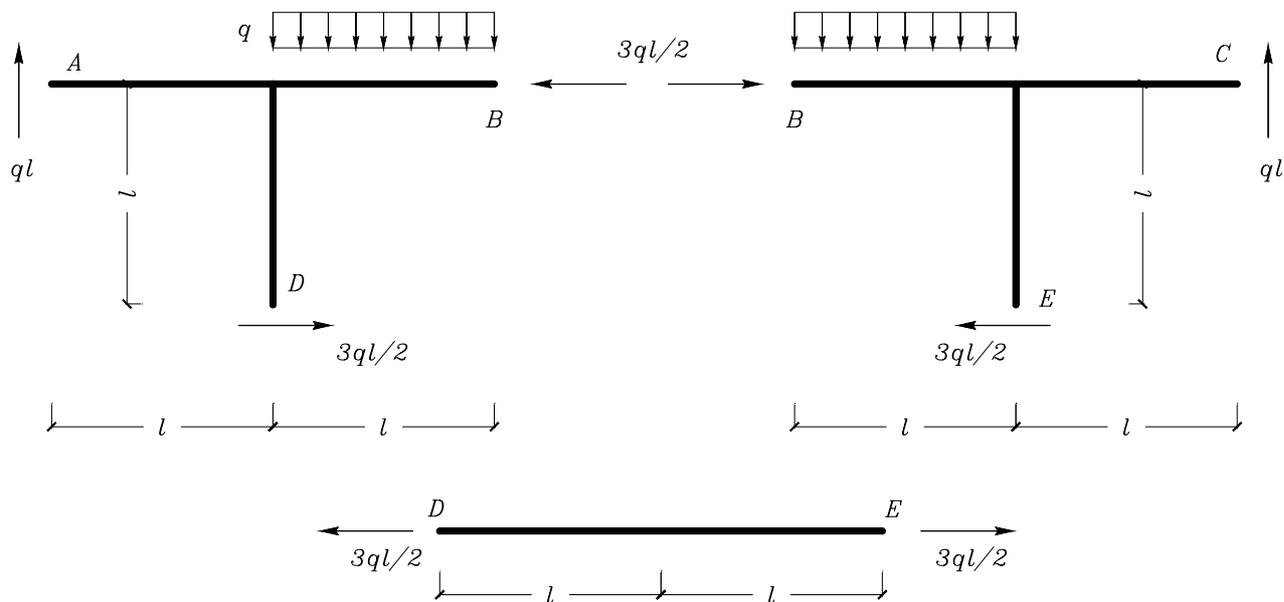


Figura 1.24: soluzione.

## 1.2 Principio dei lavori virtuali

### 1.2.1 Esempio 1

Calcolare per la struttura isostatica studiata nel paragrafo 1.1.1 la reazione vincolare  $M_A$  come indicato in Figura 1.25.

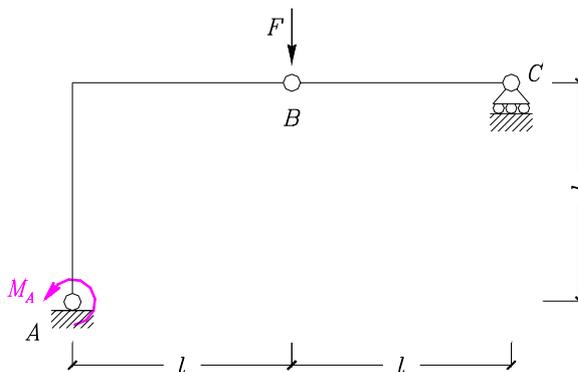


Figura 1.25: schema svincolato esplicitando la reazione da calcolare.

L'equazione dei lavori virtuali esprime condizioni di equilibrio e può, quindi, costituire un approccio alternativo per il calcolo delle reazioni vincolari in sistemi di corpi rigidi. Infatti, verificare che un sistema, soggetto a generici enti forza, sia in una configurazione di equilibrio equivale a verificare che sia nullo il lavoro virtuale prodotto da tali enti per un qualsiasi campo di spostamenti infinitesimi che si sviluppino a partire dalla configurazione in esame in modo congruente con i vincoli presenti (*Principio dei lavori virtuali*, PLV).

Per schemi isostatici di corpi rigidi il PLV può, quindi, essere applicato rimuovendo dapprima lo spostamento bloccato dalla reazione vincolare da calcolare e valutando poi quel valore della reazione che è in grado di annullare il lavoro prodotto dai carichi quando il sistema produca un generico spostamento infinitesimo e congruente (o più semplicemente *virtuale*).

La Figura 1.25 costituisce un esempio di struttura svincolata (vedasi il relativo schema isostatico in Figura 1.1) che risulta labile per una generica rotazione  $\varphi$  intorno alla cerniera in A. Utilizzando, infatti, il procedimento delle catene cinematiche la struttura ammette un cinematismo poichè il centro relativo  $c_{12}$  è allineato con il centro assoluto  $c_1$  della cerniera A e con il centro assoluto  $c_2$ , identificato dall'intersezione della retta definita dai primi due centri con quella dell'asse del carrello; come è noto, infatti, il carrello è un vincolo semplice che ammette come centro di rotazione un qualsiasi punto appartenente al suo asse. Il cinematismo, in definitiva, è rappresentato tramite i diagrammi di spostamento verticale e orizzontale riportati in Figura 1.26. Si noti in particolare che il diagramma degli spostamenti orizzontali del corpo II si riduce solo ad un segmento di ampiezza pari a  $\varphi l$ .

Il lavoro virtuale delle azioni presenti risulta, quindi

$$\delta L = F\varphi l - M_A\varphi = 0, \quad \forall \varphi \quad (1.17)$$

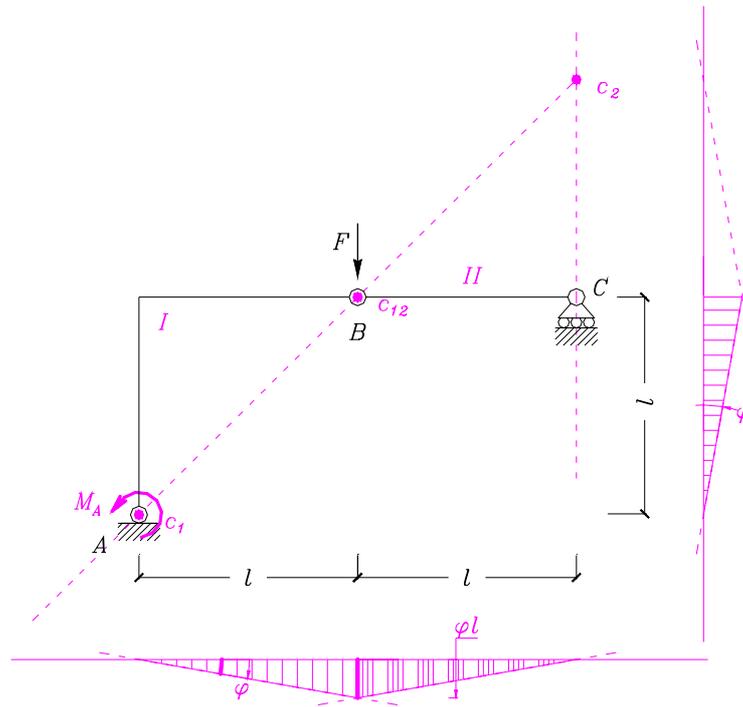


Figura 1.26: catena cinematica dello schema di Figura 1.25 (la campitura a doppio tratteggio si riferisce agli spostamenti del corpo  $II$ ).

da cui si ottiene

$$M_A = Fl \quad (1.18)$$

e si può verificare come questo valore coincida con quello della reazione momento esplicitata dall'incastro in  $A$  dello schema isostatico di Figura 1.1, calcolata con le equazioni cardinali della statica.

## 1.2.2 Esempio 2

Calcolare per la struttura isostatica studiata nel paragrafo 1.1.2 la reazione vincolare  $H_B$  come indicato in Figura 1.27.

Così come fatto nell'esempio precedente, il procedimento delle catene cinematiche consente di tracciare i diagrammi degli spostamenti. Si è ancora in presenza di un sistema costituito di due corpi rigidi. Il pendolo interno disposto verticalmente possiede un centro di rotazione sul suo asse il quale è individuato intersecando tale asse con la retta passante per i due centri di rotazione assoluti,  $c_1$  in  $A$  e  $c_2$  in  $C$ . La Figura 1.28 mostra quindi il cinematismo che la struttura ammette a partire da una rotazione  $\varphi$  impressa in  $A$ . Si noti in particolare che il diagramma degli spostamenti orizzontali del corpo  $II$  è speculare a quello del corpo  $I$  in quanto poichè la rotazione di  $c_2$  risulta, per costruzione del diagramma degli spostamenti verticali, pari a quella di  $c_1$  con segno opposto, ossia  $-\varphi$ .

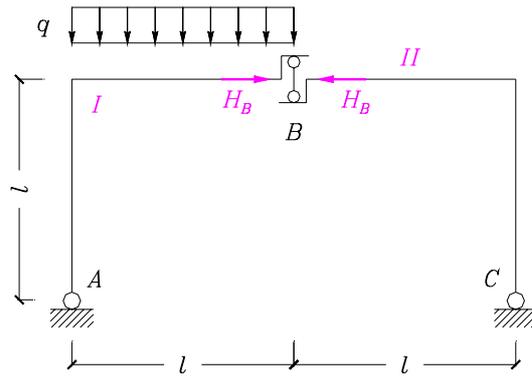


Figura 1.27: schema svincolato esplicitando la reazione da calcolare.

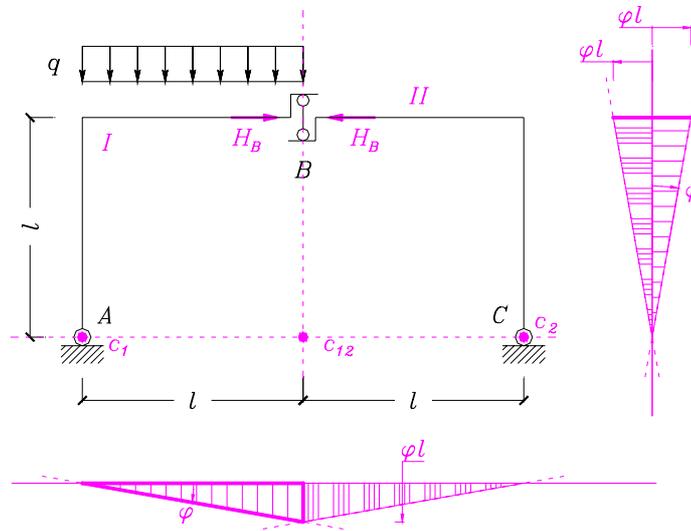


Figura 1.28: catena cinematica dello schema di Figura 1.27 (la campitura a doppio tratteggio si riferisce agli spostamenti del corpo II).

Pertanto, il lavoro virtuale si esprime

$$\delta L = \int_0^l q\varphi z dz + H_B\varphi l + H_B\varphi l q l^2/2\varphi + 2H_B\varphi l = 0, \quad \forall \varphi \quad (1.19)$$

da cui

$$H_B = -ql/4 \quad (1.20)$$

così come ottenuto nel paragrafo 1.1.2 tramite le equazioni cardinali della statica. Si noti, infine, che quando si deve calcolare il lavoro prodotto da un carico uniforme distribuito  $q$  su un tratto di lunghezza  $l$ , questo è dato moltiplicando  $q$  per l'area del diagramma degli spostamenti sotteso allo stesso tratto; mentre il diagramma, infatti, è sempre lineare essendo in campo di spostamenti infinitesimi, questa semplificazione è valida solo se il carico distribuito è costante.

In riferimento alla stessa struttura isostatica di figura Figura 1.4, calcolare la reazione vincolare  $V_B$  come indicato in Figura 1.29.

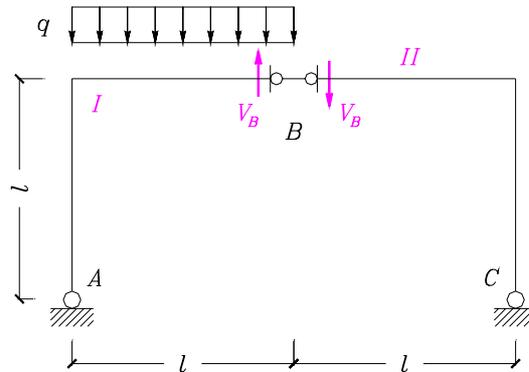


Figura 1.29: schema svincolato esplicitando la reazione da calcolare.

In questo caso la retta passante per i due centri assoluti  $c_1$  in  $A$  e  $c_2$  in  $C$  si interseca solo all'infinito con l'asse del pendolo interno. Pertanto, il centro relativo  $c_{12}$  è un centro improprio con direzione orizzontale ed il cinemtismo dello schema è quello di Figura 1.30. Si noti che, anche in questo caso, è possibile costruire i

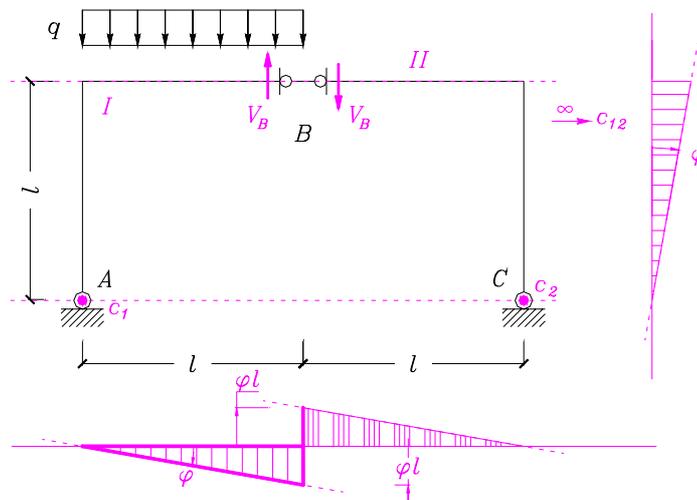


Figura 1.30: catena cinematica dello schema di Figura 1.29 (la campitura a doppio tratteggio si riferisce agli spostamenti del corpo II).

diagrammi controllando che la rotazione in  $c_2$  sia ovviamente la stessa guardando agli spostamenti sia verticali sia orizzontali.

La valutazione, quindi, del lavoro virtuale

$$\delta L = ql^2/2\varphi - 2V_B\varphi l = 0, \quad \forall \varphi \tag{1.21}$$

porta al seguente risultato

$$V_B = ql/4 \quad (1.22)$$

che, come atteso, è lo stesso di quello ottenuto nel paragrafo 1.1.2.

### 1.2.3 Esempio 3

Calcolare per la struttura isostatica studiata nel paragrafo 1.1.3 la reazione vincolare  $H_A$  come indicato in Figura 1.31.

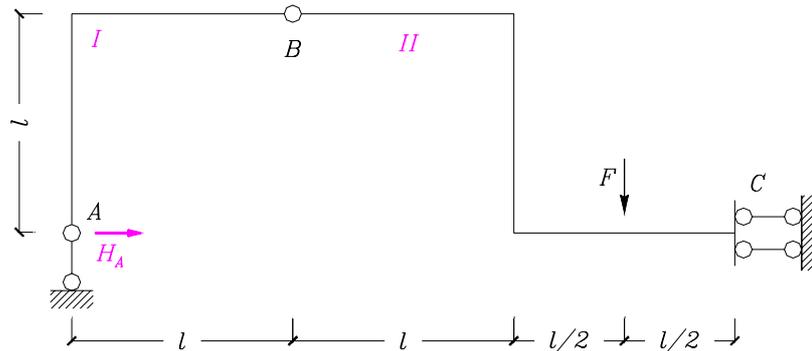


Figura 1.31: schema svincolato esplicitando la reazione da calcolare.

Il sistema in esame, composto da due corpi rigidi, possiede per la presenza in  $C$  di un doppio pendolo un centro assoluto  $c_2$  improprio con direzione orizzontale. Poiché  $c_{12}$  è fissato dalla cerniera interna in  $B$ , il centro assoluto identificato dal pendolo in  $A$  non può che trovarsi come indicato in Figura 1.32, in modo che  $c_1$  e  $c_{12}$  appartengano ad una retta orizzontale e siano quindi allineati col centro improprio  $c_2$ .

Il cinematismo, mostrato nella stessa Figura 1.32, può essere tracciato a partire da una rotazione  $\varphi$  in  $c_1$ . In particolare, gli spostamenti orizzontali del corpo  $II$  sono nulli perchè tale è lo spostamento in  $c_{12}$  e perchè il centro assoluto  $c_2$ , improprio, ammette solo spostamenti verticali. Infatti, il diagramma di tali spostamenti è lineare fino all'altezza di  $c_{12}$  da cui poi prosegue in modo costante fino a  $C$ .

In questo caso, pertanto, il lavoro virtuale si esprime come

$$\delta L = F\varphi l - H_A\varphi l = 0, \quad \forall \varphi \quad (1.23)$$

da cui si ha, come atteso,

$$H_A = F \quad (1.24)$$

### 1.2.4 Esempio 4

Calcolare per la struttura isostatica studiata nel paragrafo 1.1.4 la reazione vincolare  $V_C$  come indicato in Figura 1.33.

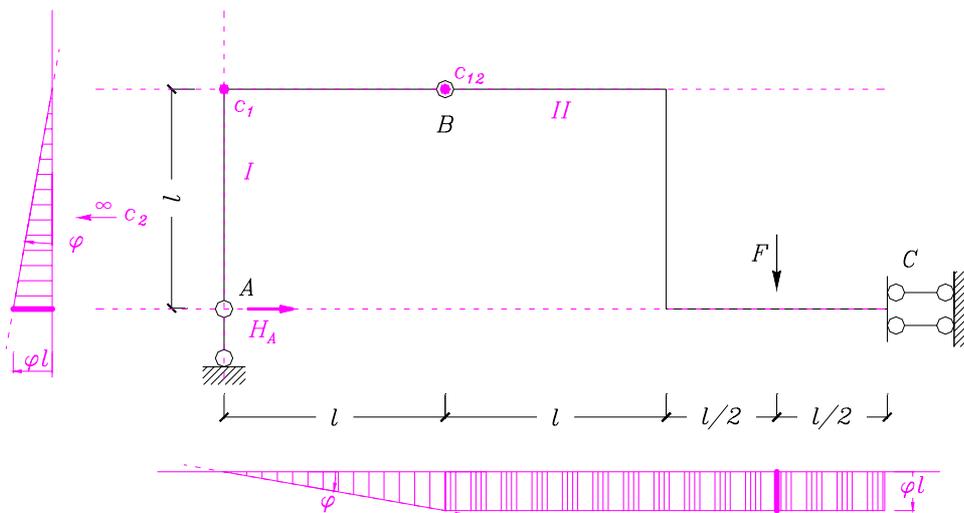


Figura 1.32: catena cinematica dello schema di Figura 1.31 (la campitura a doppio tratteggio si riferisce agli spostamenti del corpo *II*).

Il sistema in esame è costituito da tre corpi. Tuttavia, la contemporanea presenza del carrello in *D* e del doppio pendolo in *E* non consente di identificare un unico centro assoluto  $c_3$  per il corpo *III* e quindi la cinematica dell'intero sistema può essere ricondotta a quella dell'insieme dei corpi *I* e *II*, immaginando che il pendolo interno in *C* sia vincolato alla sua destra a terra.

Il procedimento delle catene cinematiche permette, pertanto, di identificare con la cerniera in *A* il centro assoluto  $c_1$  e con la cerniera interna *B* i centri relativo  $c_{12}$  e assoluto  $c_2$  (v. Figura 1.34); questi ultimi due, infatti, coincidono poichè questo è l'unico modo per allineare i tre centri.

Dall'equazione dei lavori virtuali

$$\delta L = -q\varphi l^2/2 - V_C\varphi l = 0, \quad \forall \varphi \tag{1.25}$$

si ottiene quindi

$$V_C = ql/2 \tag{1.26}$$

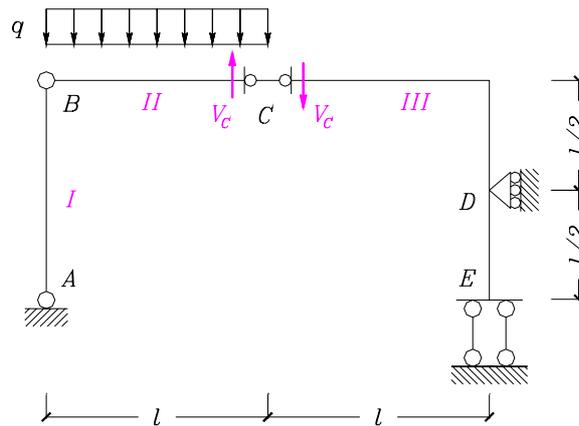


Figura 1.33: schema svincolato esplicitando la reazione da calcolare.

In riferimento alla stessa struttura isostatica di figura Figura 1.10, calcolare la reazione vincolare  $H_D$  come indicato in Figura 1.35.

I vincoli del sistema identificano, questa volta, anche un centro assoluto  $c_3$ , il quale risulta improprio per effetto del doppio pendolo presente in  $E$ . I centri  $c_1$ ,  $c_{12}$  e  $c_{23}$  si trovano necessariamente nelle cerniere rispettivamente  $A$ ,  $B$  e  $C$ . Il centro assoluto  $c_2$ , invece, non può che coincidere con  $c_3$  ed essere anch'esso un centro improprio poichè così possono essere allineati le due terne di punti  $\{c_1, c_{12}, c_2\}$  e  $\{c_2, c_{23}, c_3\}$  (v. Figura 1.36).

Pertanto operando una rotazione  $\varphi$  arbitraria intorno a  $c_1$  risulta che tutto il sistema ha soli spostamenti orizzontali e, in particolare, il corpo  $I$  un diagramma lineare da 0 fino a  $\varphi l$ , mentre i corpi  $II$  e  $III$  traslano interamente di questo stesso valore. Il lavoro virtuale si riduce al solo termine Dall'equazione dei lavori virtuali

$$\delta L = H_D \varphi l = 0, \quad \forall \varphi \quad (1.27)$$

da cui si ha ovviamente

$$H_D = 0 \quad (1.28)$$

In riferimento alla stessa struttura isostatica di figura Figura 1.10, calcolare la reazione vincolare  $M_E$  come indicato in Figura 1.37.

Come in precedenza, i vincoli esterni presenti nel corpo  $III$  identificano un unico centro di rotazione assoluta  $c_3$  che si trova in  $D$ , all'intersezione dell'asse del carrello orizzontale in  $D$  e del pendolo verticale in  $E$ . Poichè gli altri vincoli interni ed esterni sono ancora solo cerniere, l'intero sistema come rappresentato in Figura 1.38, in cui in particolare il centro assoluto  $c_2$  è all'intersezione delle rette che congiungono rispettivamente i centri  $c_1 - c_{12}$  e  $c_{23} - c_3$ .

Il diagramma di spostamenti è costruito a partire da una rotazione arbitraria  $\varphi$  intorno a  $c_2$ . Risulta che, guardando agli spostamenti orizzontali, la rotazione in  $c_1$  sia pari a  $\varphi/2$  mentre, guardando agli spostamenti verticali, la rotazione in  $c_3$  sia  $\varphi$ .

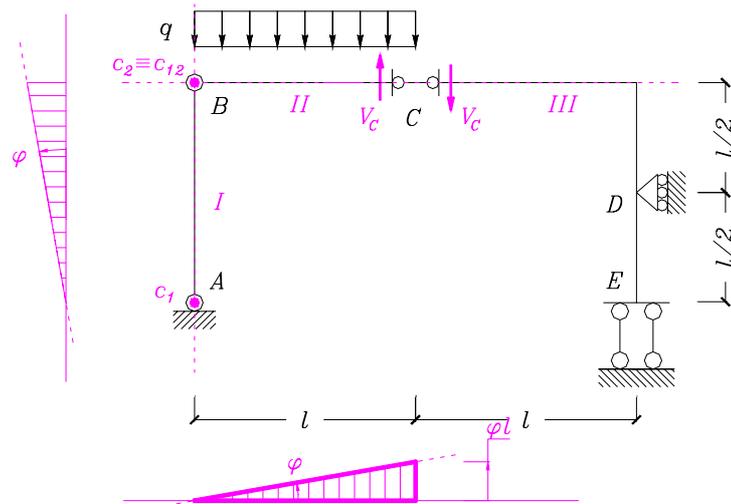


Figura 1.34: catena cinematica dello schema di Figura 1.33 (la campitura a doppio tratteggio si riferisce agli spostamenti del corpo *II*).

Si noti che, in queste condizioni, il diagramma orizzontale relativo al corpo *III*, e cioè da  $c_2$  a  $c_3$ , si intreccia intorno a  $c_3$ . Pertanto, dall'espressione del lavoro virtuale:

$$\delta L = -q\varphi l^2/2 + M_E\varphi = 0, \quad \forall \varphi \tag{1.29}$$

si ritrova il risultato atteso

$$M_E = -ql/2 \tag{1.30}$$

### 1.2.5 Esempio 5

Calcolare la reazione vincolare  $V_B$  così come esplicitata nello schema labile di Figura 1.33.

Nello schema di Figura 1.33 si riconosce immediatamente il centro di rotazione assoluta  $c_1$  nella cerniera in  $A$ . Invece, i centri assoluto  $c_2$  e relativo  $c_{12}$  possono essere così identificati: il secondo è fornito dai due vincoli interni, il pendolo orizzontale in  $B$  e quello inclinato, intersecando le rette degli assi di questi pendoli (v. Figura 1.40); il primo intersecando la retta che allinea il centro  $c_1$  al centro  $c_{12}$  trovato con l'asse del carrello esterno. Il procedimento delle catene cinematiche permette quindi di tracciare i diagrammi gli spostamenti come indicato nella stessa Figura 1.40. Si noti che per costruire tali diagrammi può essere utile imporre che all'altezza del centro  $c_{12}$  entrambi gli spostamenti verticale e orizzontale devono essere uguali che ci si riferisca sia al corpo *I* sia al corpo *II*. In questo modo si riconosce che la rotazione del corpo *II* intorno a  $c_2$  vale  $5\varphi$  e che il PLV si scrive:

$$\delta L = -V_B\varphi 2l + V_B\varphi 5l + ql\varphi l + 1/2 lq5\varphi l = 0, \quad \forall \varphi \tag{1.31}$$

da cui si ha

$$V_B = -7ql/6 \tag{1.32}$$

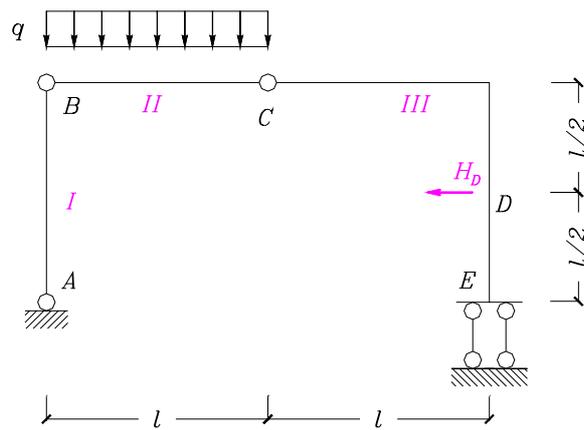


Figura 1.35: schema svincolato esplicitando la reazione da calcolare.

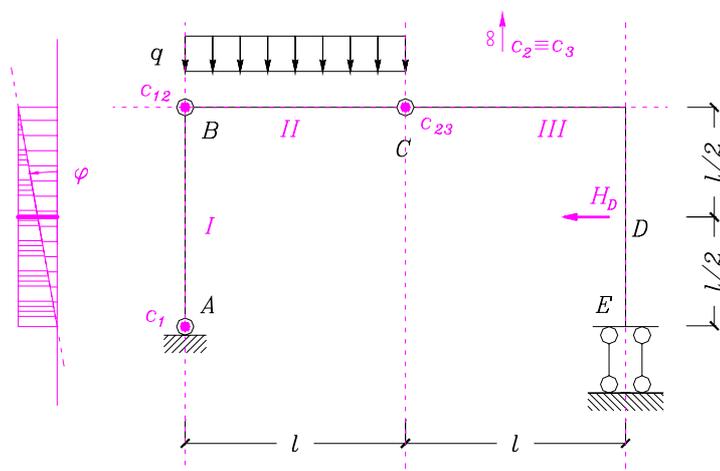


Figura 1.36: catena cinematica dello schema di Figura 1.35 (la campitura a doppio tratteggio si riferisce agli spostamenti del corpo III, quella a singolo tratteggio al corpo I).

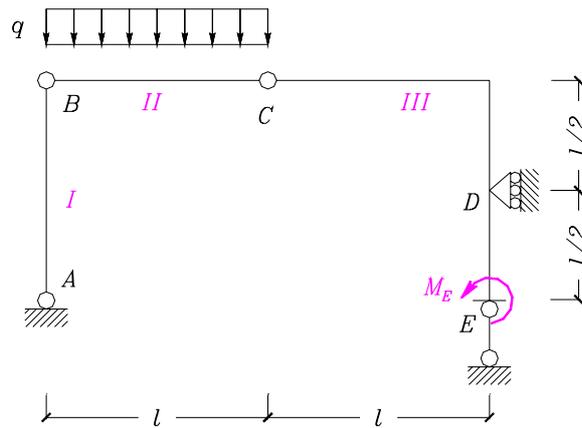


Figura 1.37: schema svincolato esplicitando la reazione da calcolare.

In riferimento allo stesso schema, calcolare la reazione vincolare  $H_B$  così come esplicitata nello schema labile di Figura 1.41.

Lo schema è ottenuto a partire da uno stesso schema isostatico da cui si è definito l'esempio precedente, salvo che nel caso in esame il pendolo interno in  $B$  è verticale anziché orizzontale. Valgono perciò le stesse considerazioni fatte in precedenza per l'identificazione dei centri assoluti e relativo (v. Figura 1.42).

Assegnata una rotazione  $\varphi$  al corpo  $I$ , il PLV si esprime tramite la condizione

$$\delta L = -H_B \varphi l + H_B 2\varphi 5l/16 + 1/2 l q 26\varphi l/16 = 0, \quad \forall \varphi \quad (1.33)$$

da cui si ha

$$H_B = 13ql/3 \quad (1.34)$$

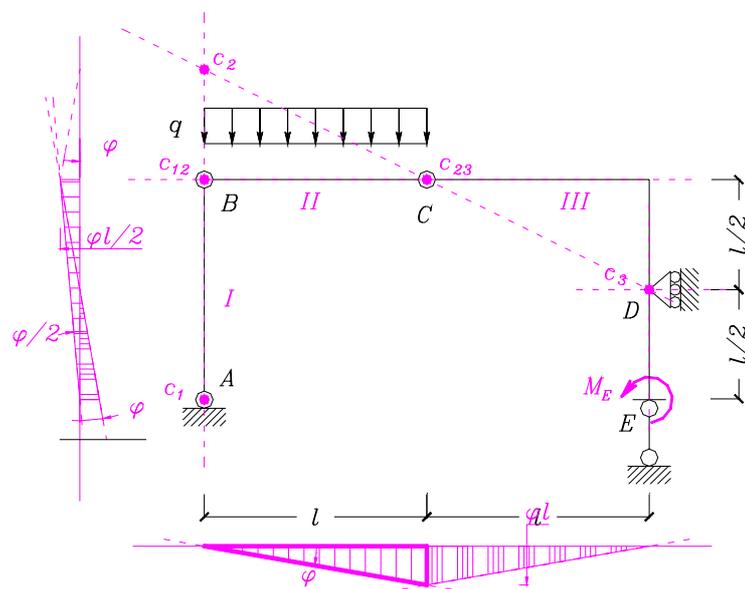


Figura 1.38: catena cinematica dello schema di Figura 1.37 (la campitura a doppio tratteggio si riferisce agli spostamenti del corpo III, quella a singolo tratteggio al corpo I per gli spostamenti orizzontali e al II per quegli verticali).

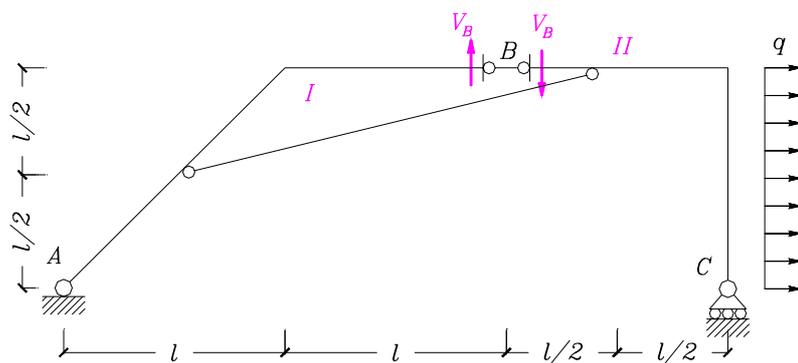


Figura 1.39: schema svincolato esplicitando la reazione da calcolare.

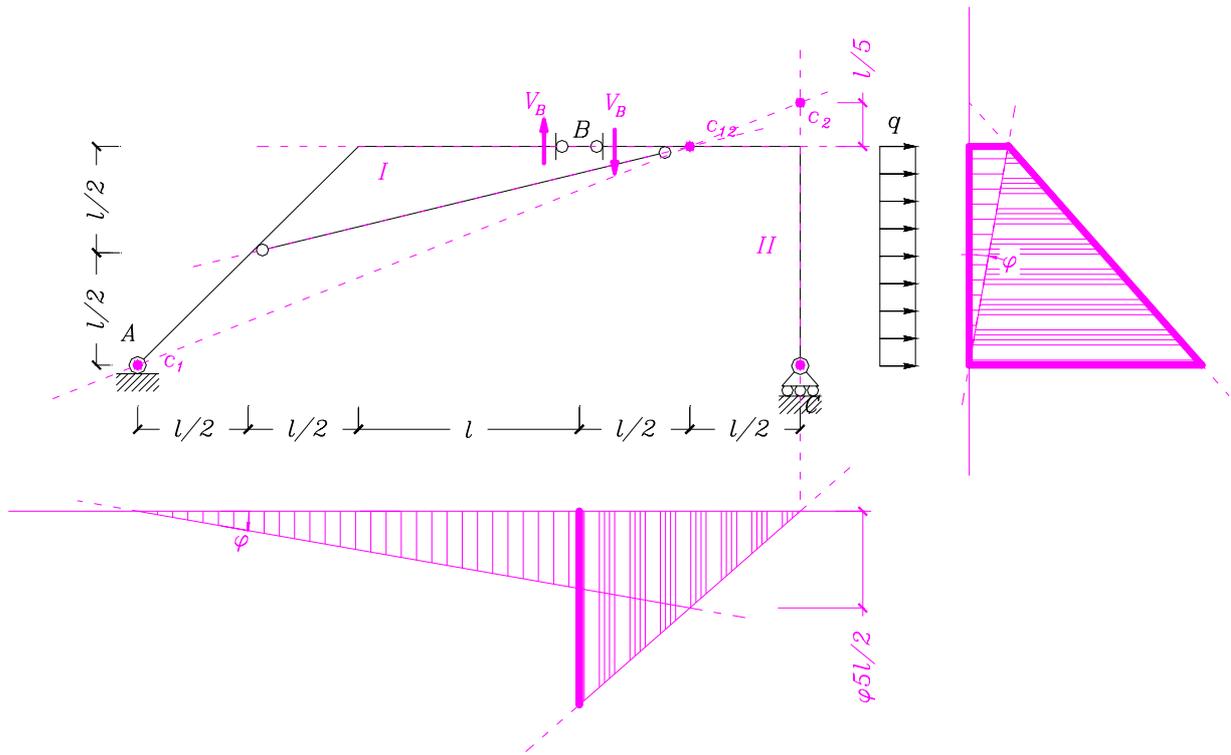


Figura 1.40: catena cinematica dello schema di Figura 1.39 (la campitura a doppio tratteggio si riferisce agli spostamenti del corpo II).

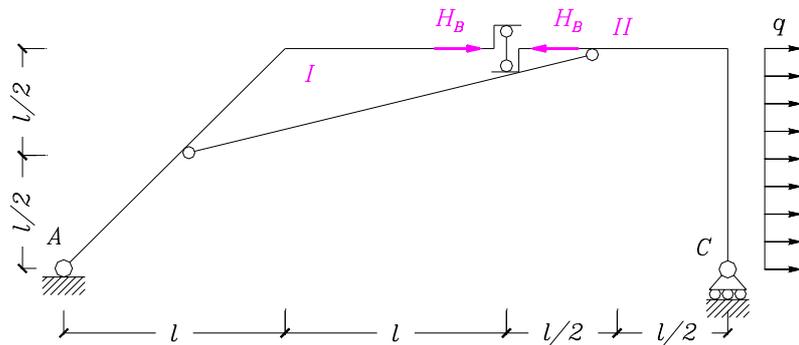


Figura 1.41: schema svincolato esplicitando la reazione da calcolare.

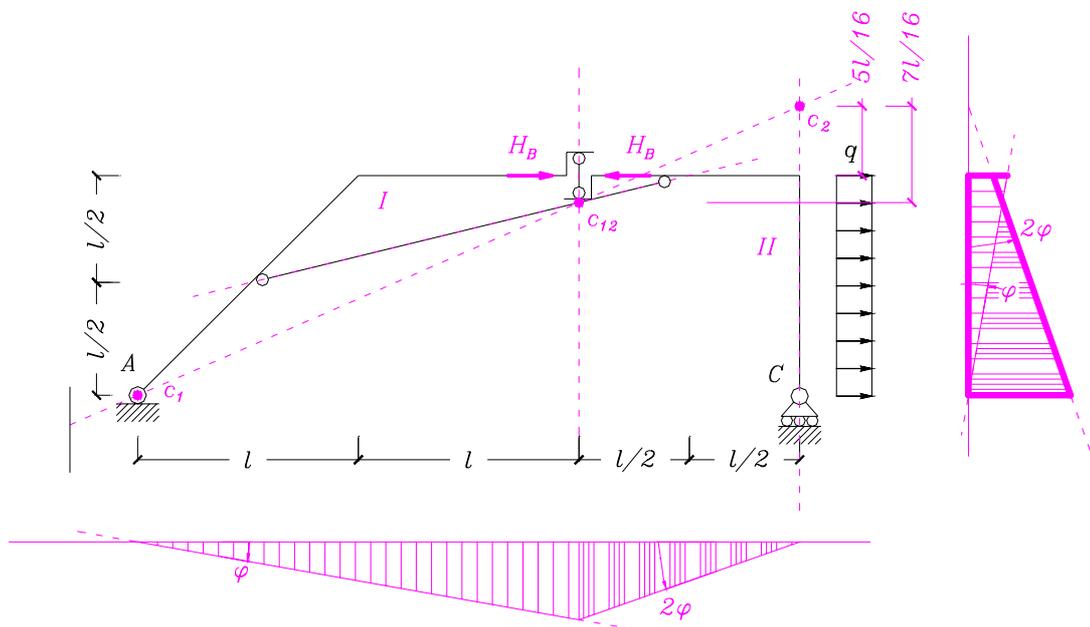


Figura 1.42: catena cinematica dello schema di Figura 1.41 (la campitura a doppio tratteggio si riferisce agli spostamenti del corpo II).

## Capitolo 2

# Calcolo dei diagrammi della sollecitazione

Prima di procedere, si ricorda la convenzione dei segni delle caratteristiche della sollecitazione adottata per i sistemi di travi piane. Sono positivi gli sforzi normali di trazione e i tagli che “ruotano” in senso orario; i momenti si disegnano dalla parte delle fibre tese (v. Figura 2.1).

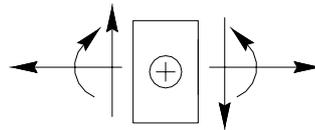


Figura 2.1: convenzione segni.

Si ricorda inoltre che le caratteristiche sono legate tra di loro attraverso le equazioni indefinite di equilibrio:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dz} = -p(z) \\ \frac{dT}{dz} = -q(z) \\ \frac{dM}{dz} = T(z) \end{cases} \quad (2.1)$$

relative ad una trave, di asse definito dall'ascissa  $z$ , sulla quale agiscono carichi distribuiti assiali  $p(z)$  e ortogonali  $q(z)$ . In presenza di azioni concentrate, siano queste forze o momenti, le corrispondenti leggi della sollecitazione presentano un salto di entità pari al valore dell'azione concentrata.

## 2.1 Procedimento diretto

### 2.1.1 Esempio 1

Calcolare i diagrammi della sollecitazione per la struttura di Figura 2.2, scrivendo le

relative leggi in modo diretto. Una volta note le reazioni dei vincoli presenti nello schema in esame, le leggi delle caratteristiche della sollecitazione (sforzo normale  $N$ , taglio  $T$  e momento flettente  $M$ ) sono, come richiesto, ricavate senza passare attraverso l'integrazione delle equazioni indefinite di equilibrio. Ciò è possibile spezzando la struttura in uno o più punti e determinando l'equilibrio locale del tratto così isolato. È necessario, quindi, che su tale tratto tutte le caratteristiche della sollecitazione siano continue.

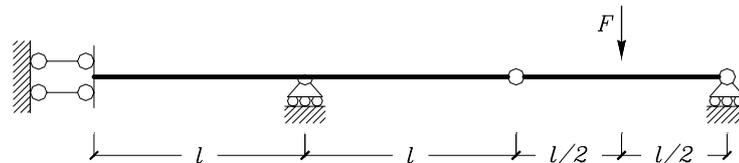


Figura 2.2: schema isostatico.

Osservando la Figura 2.2, è lecito suddividere lo schema in 4 tratti e scrivere le leggi della sollecitazione in funzione delle ascisse  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $z_3$  e  $z_4$ , così come indicato in Figura 2.3, in cui sono state già esplicitate i valori delle reazioni vincolari. Si noti che, nella stessa figura, le generiche caratteristiche della sollecitazione sono già riportate secondo la convenzione del concio di trave (v. Figura 2.1). Pertanto, equilibrando i

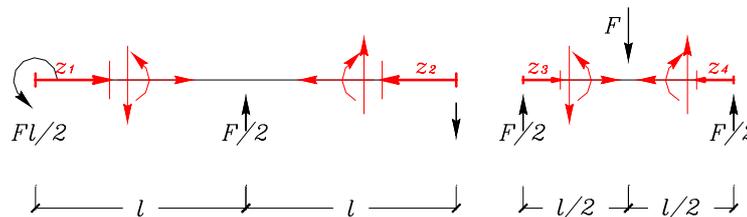


Figura 2.3: reazioni vincolari.

tratti  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $z_3$  e  $z_4$  rispettivamente si ha:

$$\begin{cases} N(z_1) = 0 \\ T(z_1) = 0 \\ M(z_1) = -Fl/2 \end{cases} \quad (2.2a)$$

$$\begin{cases} N(z_2) = 0 \\ T(z_2) = F/2 \\ M(z_2) = -F/2 z_2 \end{cases} \quad (2.2b)$$

$$\begin{cases} N(z_3) = 0 \\ T(z_3) = F/2 \\ M(z_3) = F/2 z_3 \end{cases} \quad (2.2c)$$

$$\begin{cases} N(z_4) = 0 \\ T(z_4) = -F/2 \\ M(z_4) = F/2 z_4 \end{cases} \quad (2.2d)$$

I diagrammi del taglio e del momento sull'intera struttura hanno quindi l'andamento riportato in Figura 2.4.

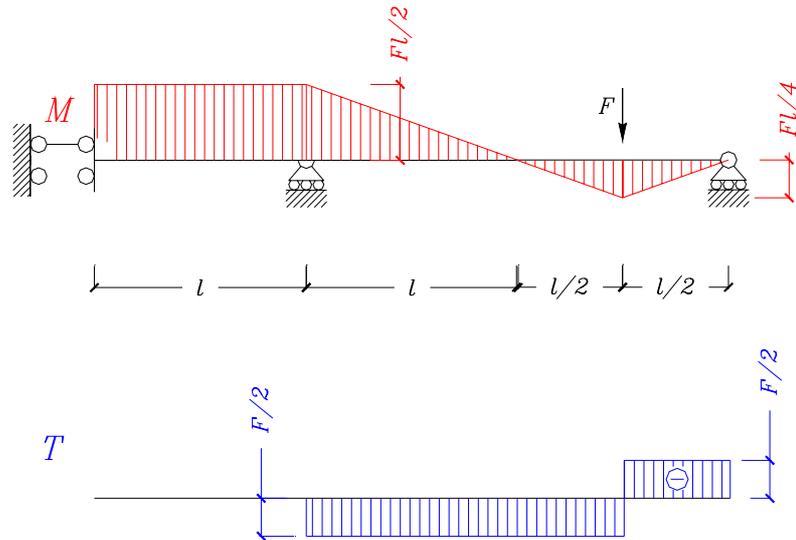


Figura 2.4: diagrammi della sollecitazione dello schema di Figura 2.2.

### 2.1.2 Esempio 2

Calcolare i diagrammi della sollecitazione per la struttura di Figura 2.5, scrivendo le relative leggi in modo diretto. Si suppongono note le reazioni vincolari (v. Figura 2.9) e anche in questo caso si considerano 4 differenti tratti della struttura, definiti dalle ascisse ( $z_1, \dots, z_4$ ), così come disposto in Figura 2.6; infatti, pur essendo due soli tratti rettilinei, su questi sono presenti due discontinuità, una legata al carico distribuito (discontinuità del carico) ed una alla reazione del pendolo inclinato (discontinuità del taglio).

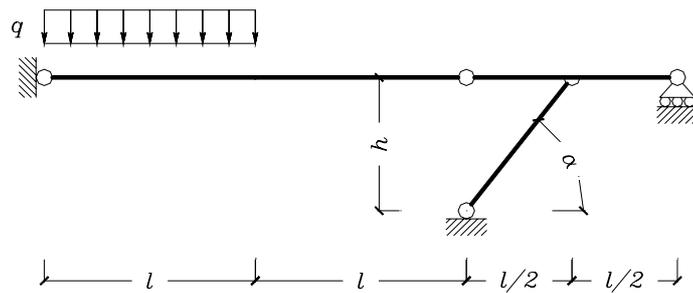


Figura 2.5: schema isostatico.

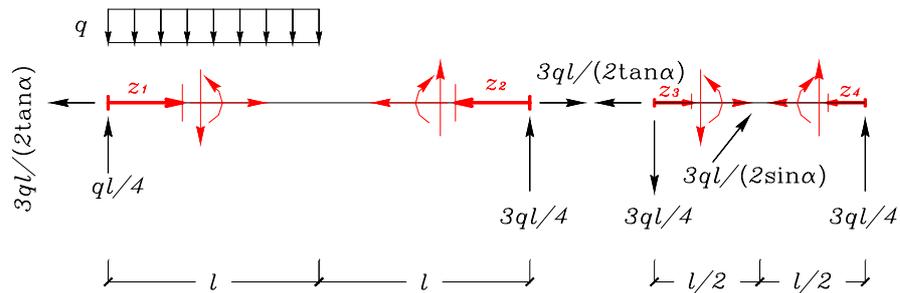


Figura 2.6: reazioni vincolari.

Per la convenzione dei segni adottata, le leggi delle sollecitazioni valgono quindi:

$$\begin{cases} N(z_1) = 3ql/(2 \tan \alpha) \\ T(z_1) = ql/4 - qz_1 \\ M(z_1) = qlz_1/4 - qz_1^2/2 \end{cases} \quad (2.3a)$$

$$\begin{cases} N(z_2) = 3ql/(2 \tan \alpha) \\ T(z_2) = -3ql/4 \\ M(z_2) = 3qlz_2/4 \end{cases} \quad (2.3b)$$

$$\begin{cases} N(z_3) = 3ql/(2 \tan \alpha) \\ T(z_3) = -3ql/4 \\ M(z_3) = -3qlz_3/4 \end{cases} \quad (2.3c)$$

$$\begin{cases} N(z_4) = 0 \\ T(z_4) = -3ql/4 \\ M(z_4) = 3qlz_4/4 \end{cases} \quad (2.3d)$$

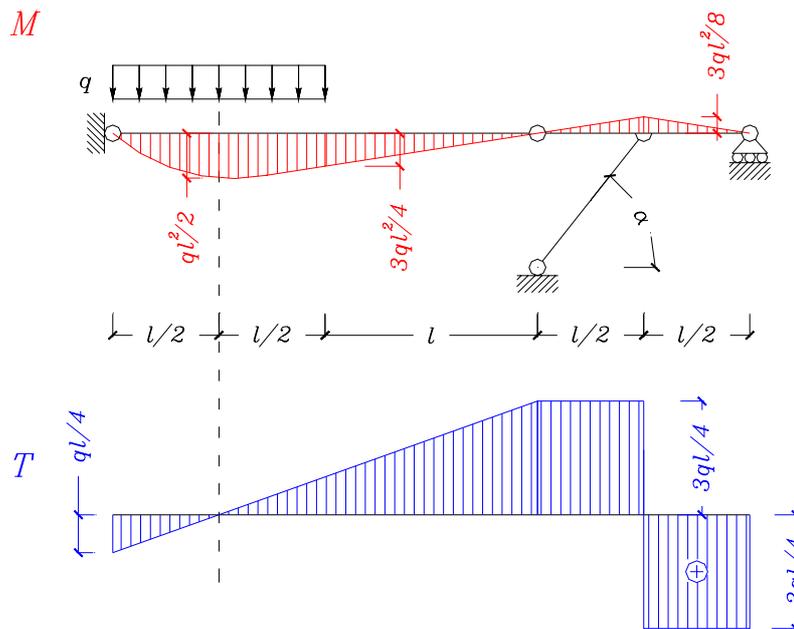


Figura 2.7: diagrammi della sollecitazione dello schema di Figura 2.5.

Pertanto, i diagrammi delle sollecitazioni sono quelli riportati in Figura 2.7 in cui si è ommesso per semplicità quello relativo allo sforzo normale.

Si noti, in particolare, che la continuità del taglio nella sezione  $z_1 = l$  fa sì che pur essendoci a ridosso di questo valore due leggi diverse del momento le tangenti a queste in  $z_1 = l$  appunto e  $z_2 = 0$  sono le stesse. In  $z_3 = l$ , invece, al salto del diagramma del taglio corrisponde una cuspidè in quella del momento, e in  $z_1 = l/2$  all'annullarsi del taglio corrisponde un massimo del momento.

### 2.1.3 Esempio 3

Calcolare i diagrammi della sollecitazione per la struttura di Figura 2.8, scrivendo le relative leggi in modo diretto. Anche in questo esempio si assumono note le reazioni vincolari (v. Figura 2.9). I tratti rettilinei sono 4 e poichè all'interno di questi non agiscono carichi, le ascisse scelte sono anche 4 così come definite in Figura 2.9.

Imponendo l'equilibrio su ciascuno tratto, si ottengono le seguenti leggi:

$$\begin{cases} N(z_1) = (m/5l - 3m/5l)\sqrt{2}/2 \\ T(z_1) = (m/5l + 3m/5l)\sqrt{2}/2 \\ M(z_1) = -(m/5l + 3m/5l)z_1\sqrt{2}/2 \end{cases} \quad (2.4a)$$

$$\begin{cases} N(z_2) = -3m/5l \\ T(z_2) = -m/5l \\ M(z_2) = -m + mz_2/5l \end{cases} \quad (2.4b)$$

$$\begin{cases} N(z_3) = -3m/5l \\ T(z_3) = -m/5l \\ M(z_3) = -m - mz_3/5l \end{cases} \quad (2.4c)$$

$$\begin{cases} N(z_4) = m/5l \\ T(z_4) = 3m/5l \\ M(z_4) = -3mz_4/5l \end{cases} \quad (2.4d)$$

da cui possono tracciarsi i diagrammi in Figura 2.10. Si noti che sia in  $z_1 = l\sqrt{2}$  sia in  $z_3 = l$ , per l'equilibrio ai nodi, i valori dei momenti restano gli stessi; si dice, infatti, che il momento si “ribalta”.

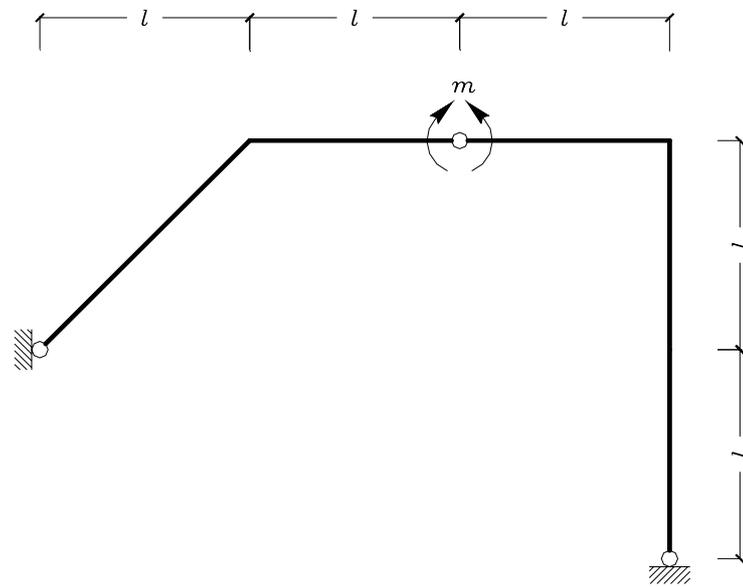


Figura 2.8: schema isostatico.

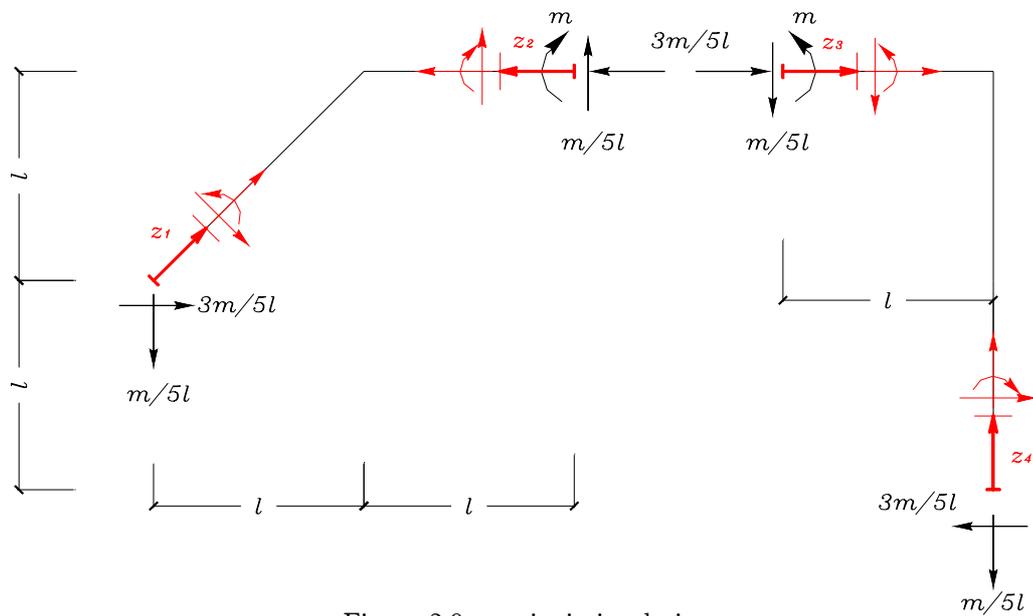


Figura 2.9: reazioni vincolari.

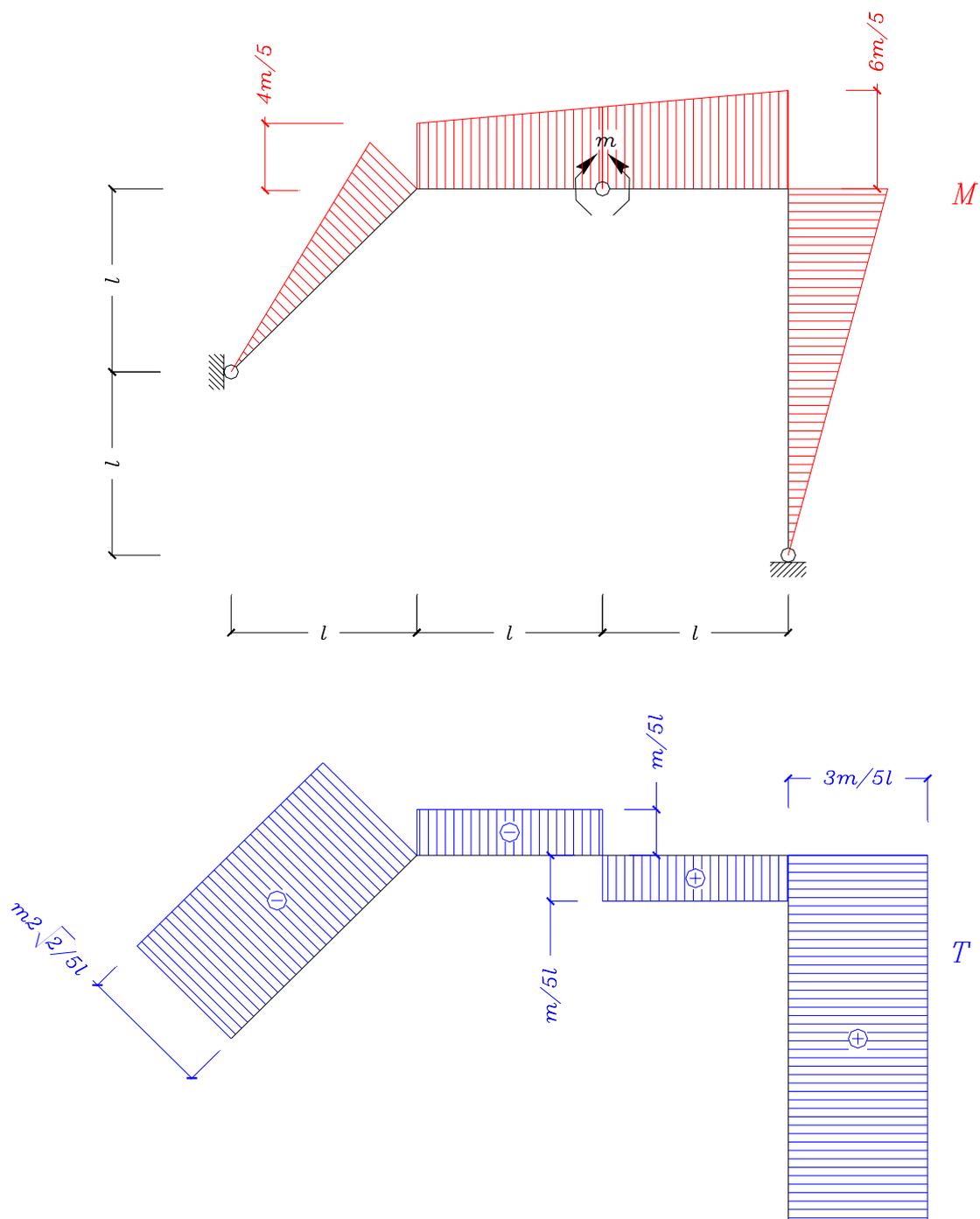


Figura 2.10: diagrammi della sollecitazione dello schema di Figura 2.8.

### 2.1.4 Esempio 4

Calcolare i diagrammi della sollecitazione per la struttura di Figura 2.11, scrivendo le relative leggi in modo diretto.

Anche in questo caso si prendono in considerazione un numero di ascisse pari al numero dei tratti rettilinei così come disposte in Figura 2.12 in cui sono state già riportate le reazioni vincolari. Le leggi delle sollecitazioni valgono quindi

$$\begin{cases} N(z_1) = -2m/3l \\ T(z_1) = m/3l \\ M(z_1) = mz_1/3l \end{cases} \quad (2.5a)$$

$$\begin{cases} N(z_2) = -m/3l \\ T(z_2) = -2m/3l \\ M(z_2) = m/3 - 2mz_2/3l \end{cases} \quad (2.5b)$$

$$\begin{cases} N(z_3) = -2m/3l \\ T(z_3) = m/3l \\ M(z_3) = -mz_3/3l \end{cases} \quad (2.5c)$$

$$\begin{cases} N(z_4) = -2m/3l \\ T(z_4) = m/3l \\ M(z_4) = mz_4/3l \end{cases} \quad (2.5d)$$

$$\begin{cases} N(z_5) = 0 \\ T(z_5) = 0 \\ M(z_5) = -m \end{cases} \quad (2.5e)$$

$$\begin{cases} N(z_6) = m/3l \\ T(z_6) = 2m/3l \\ M(z_6) = -2mz_6/3l \end{cases} \quad (2.5f)$$

In particolare si osservi che il nodo in cui convergono tre tratti, cioè la sezione di ascissa  $z_4 = l$ , è correttamente in equilibrio, basta, infatti, valutare i momenti  $M(z_4 = l)$ ,  $M(z_5 = l)$  e  $M(z_6 = l)$ .

I diagrammi finali complessivamente sulla struttura sono raffigurati in Figura 2.13, in cui per semplicità non è stato riportato il diagramma dello sforzo normale.

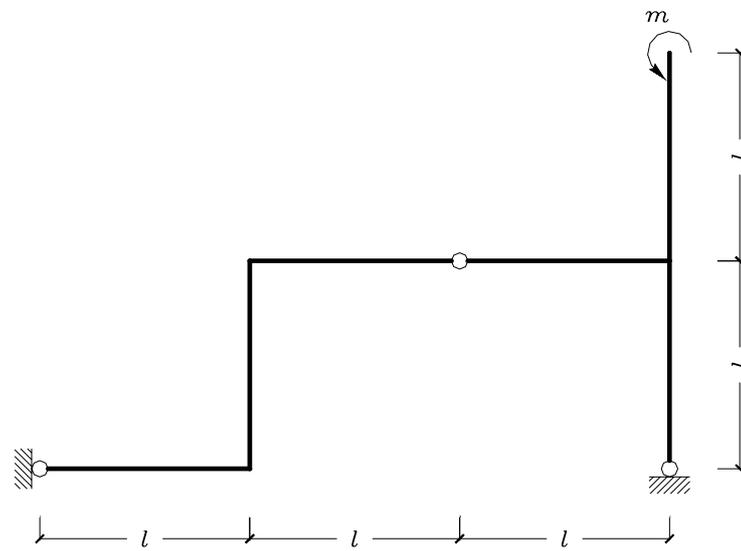


Figura 2.11: schema isostatico.

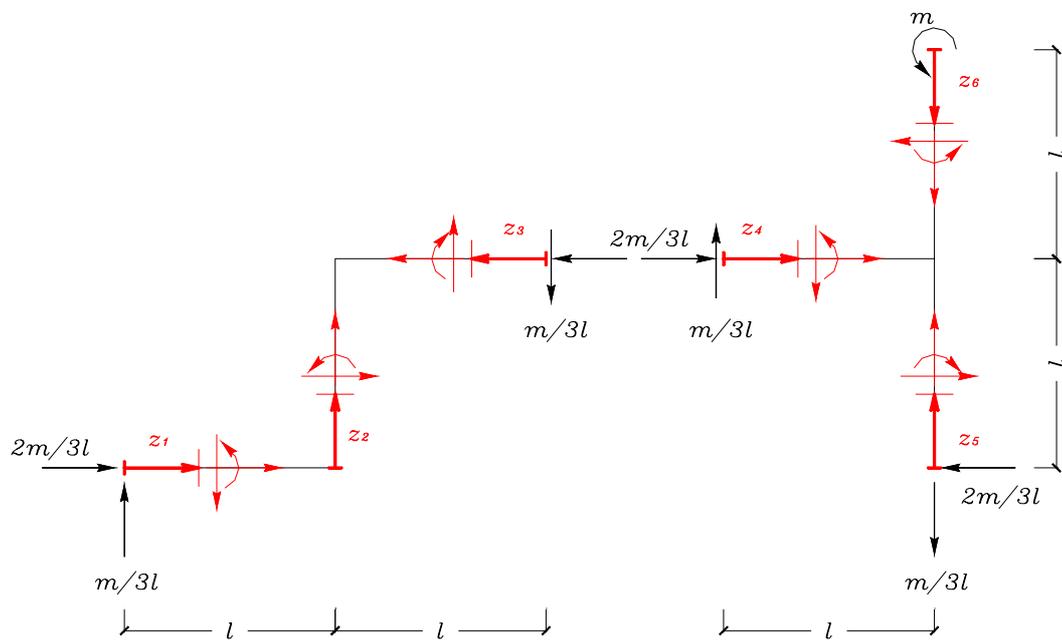


Figura 2.12: reazioni vincolari.

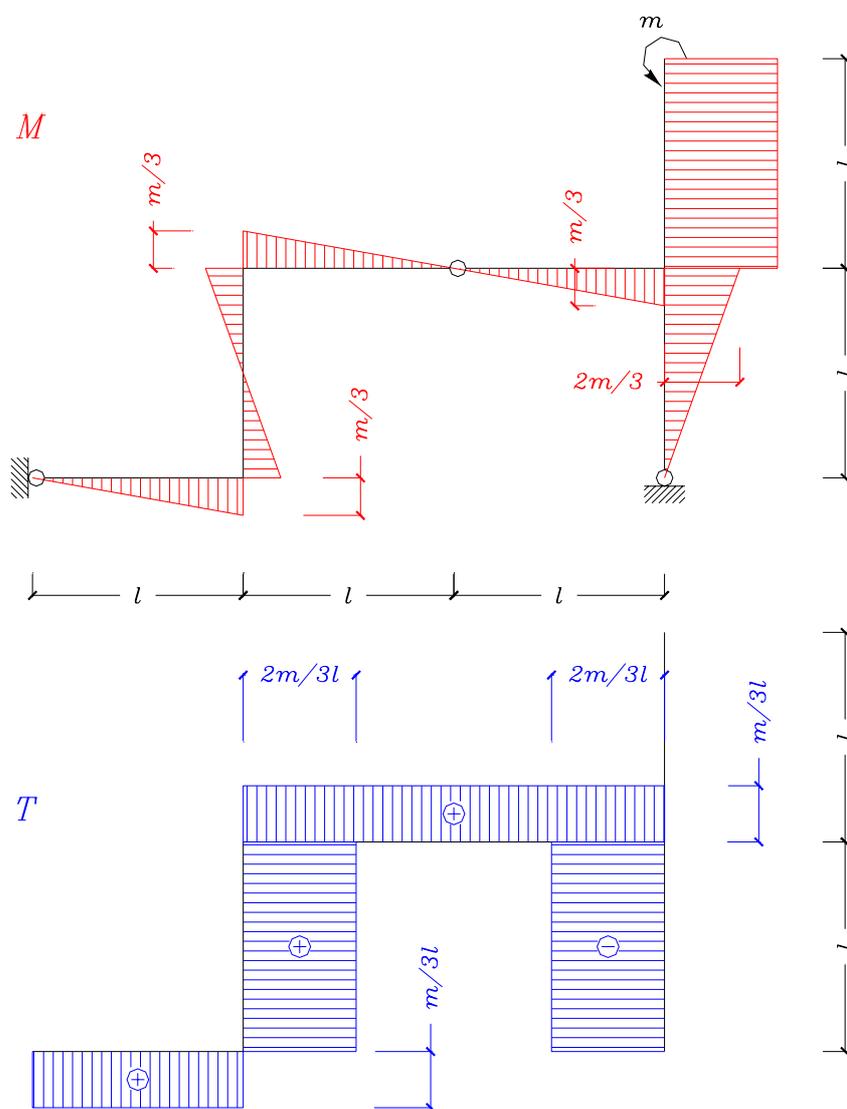


Figura 2.13: diagrammi della sollecitazione dello schema di Figura 2.11.

### 2.1.5 Esempio 5

Calcolare i diagrammi della sollecitazione per la struttura di Figura 2.14, scrivendo le relative leggi in modo diretto. È questo un caso di schema *autoequilibrato*, nel

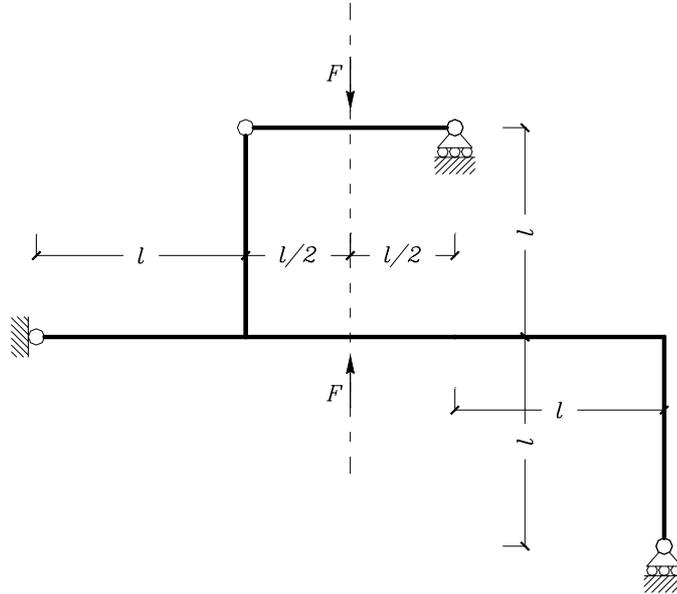


Figura 2.14: schema isostatico.

senso che i carichi agenti costituiscono già un sistema equivalente a zero. Le reazioni vincolari esterne, quindi, devono esplicitare un sistema di forze anch'esso autoequilibrato, così come indicato in Figura 2.15. Nella stessa figura sono evidenziati i tratti della struttura di ascissa  $(z_1, \dots, z_7)$ ; imponendo l'equilibrio su questi si ottengono le

seguenti leggi:

$$\begin{cases} N(z_1) = 0 \\ T(z_1) = -F/6 \\ M(z_1) = -Fz_1/6 \end{cases} \quad (2.6a)$$

$$\begin{cases} N(z_2) = -F/2 \\ T(z_2) = 0 \\ M(z_2) = 0 \end{cases} \quad (2.6b)$$

$$\begin{cases} N(z_3) = 0 \\ T(z_3) = F/2 \\ M(z_3) = Fz_3/2 \end{cases} \quad (2.6c)$$

$$\begin{cases} N(z_4) = 0 \\ T(z_4) = -F/2 \\ M(z_4) = Fz_4/2 \end{cases} \quad (2.6d)$$

$$\begin{cases} N(z_5) = 0 \\ T(z_5) = -2F/3 \\ M(z_5) = -Fl/6 - 2Fz_5/3 \end{cases} \quad (2.6e)$$

$$\begin{cases} N(z_6) = 0 \\ T(z_6) = F/3 \\ M(z_6) = -Fl/2 + Fz_6/3 \end{cases} \quad (2.6f)$$

$$\begin{cases} N(z_7) = F/3 \\ T(z_7) = 0 \\ M(z_7) = 0 \end{cases} \quad (2.6g)$$

I diagrammi della sollecitazione hanno dunque l'andamento rappresentato in Figura 2.16, in cui lo sforzo normale non è stato disegnato.

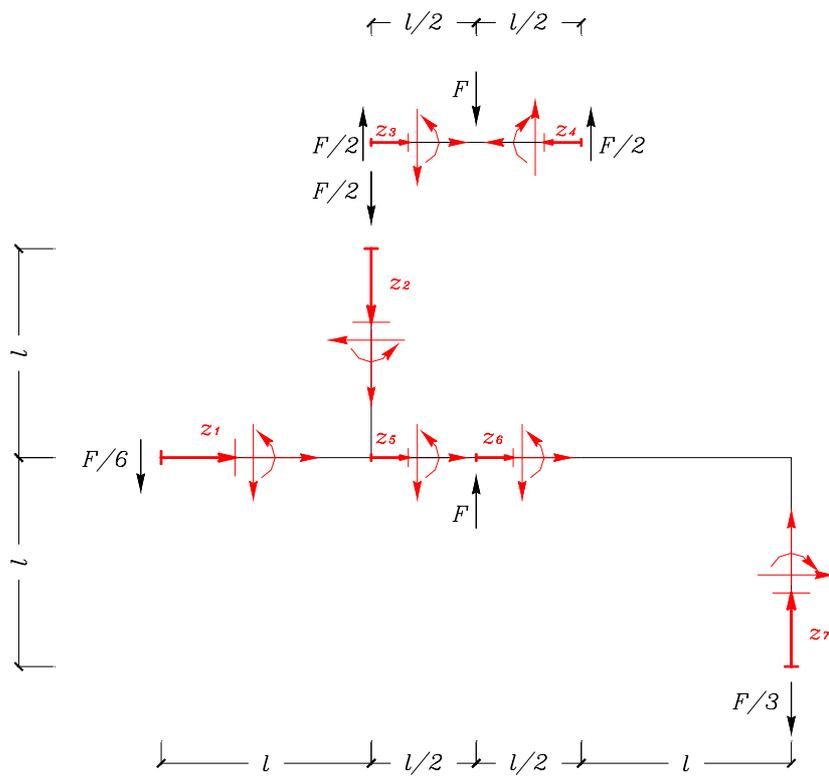


Figura 2.15: reazioni vincolari.

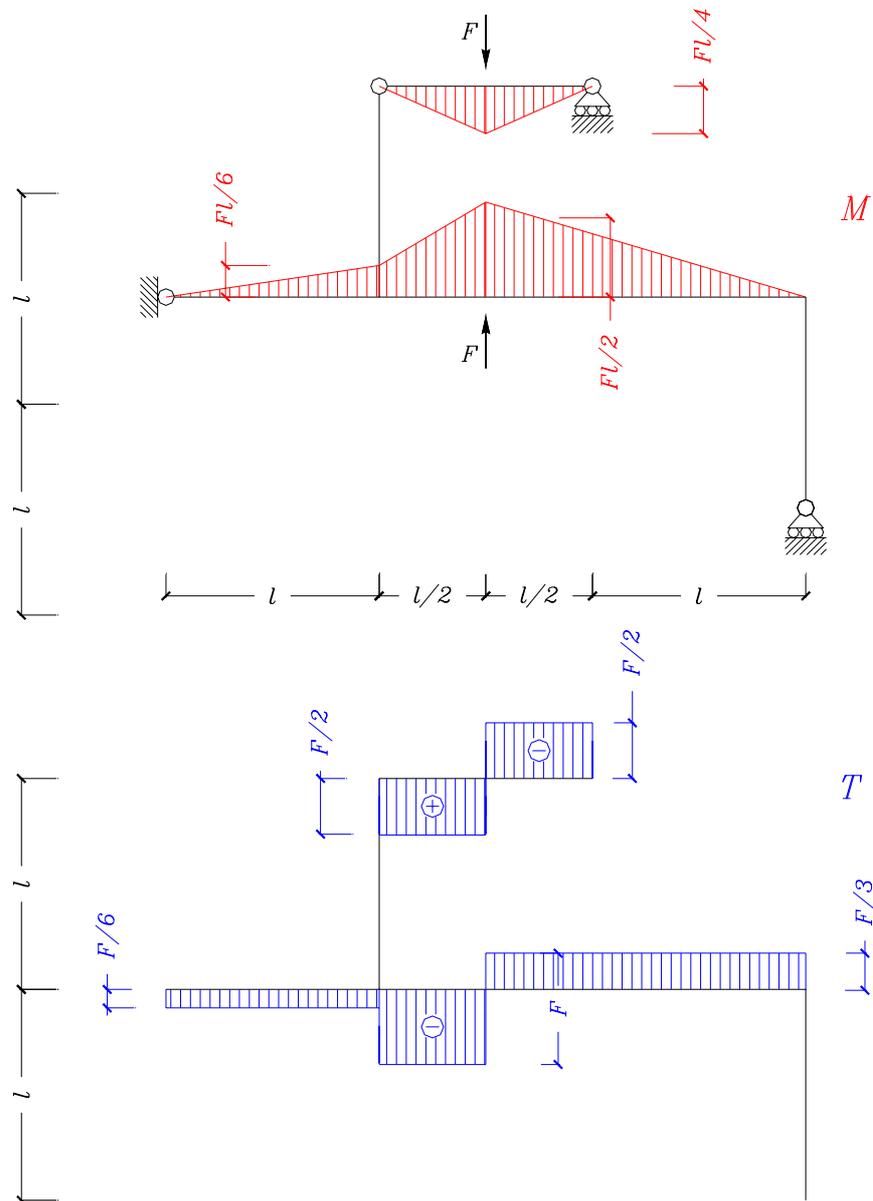


Figura 2.16: diagrammi della sollecitazione dello schema di Figura 2.14.

### 2.1.6 Esempio 6

Calcolare i diagrammi della sollecitazione per la struttura di Figura 2.17, scrivendo le relative leggi in modo diretto. Si proceda in modo più spedito tenendo conto delle considerazioni fin qui fatte sull'approccio diretto per il calcolo delle della sollecitazione, nel senso che, valutate le reazioni vincolari, si studino i tratti  $A-B$ ,  $B-C$ ,  $C-D$  e  $D-E$  tracciando direttamente i diagrammi del taglio e del momento; il tratto  $A-E$  non può che comportarsi come pendolo e quindi ammettere solo un diagramma di sforzo normale, in quanto non agiscono carichi ortogonali a questo.

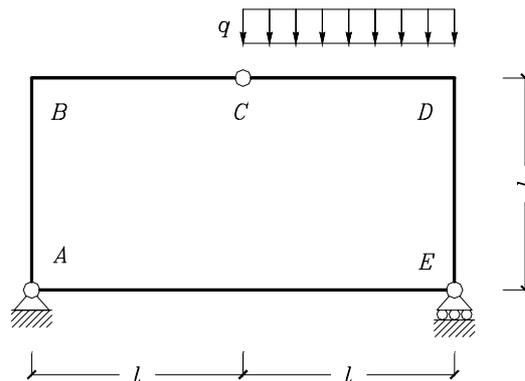


Figura 2.17: schema isostatico.

Sui tratti  $A-B$ ,  $B-C$  e  $D-E$  non sono presenti carichi distribuiti ortogonali né azioni concentrate e quindi, per le equazioni indefinite di equilibrio (2.1), l'andamento del taglio è costante e quello del momento lineare; per il primo è sufficiente conoscere il valore del taglio solo in una sezione, per il secondo il valore del momento solo in due sezioni. Per quanto riguarda il taglio è, quindi, semplice tracciare i diagrammi una volta note le reazioni vincolari, rispettivamente in  $A$ , in  $C$  e in  $E$  (v. Figura 2.18). Per quanto riguarda il momento, sul tratto  $A-B$  il diagramma si deve annullare in  $A$  essendo presente una cerniera e vale  $3ql^2/4$  in  $B$  per effetto del momento prodotto dalla reazione in  $A$  con braccio  $l$ . In  $B$  questo momento può essere ribaltato e quindi il diagramma procede lineare fino ad annullarsi in  $C$ . Le stesse considerazioni fatte per  $A-B$  possono essere applicate per il tratto  $D-E$ .

Discorso differente è necessario per il tratto  $C-D$  in cui è presente un carico uniformemente distribuito  $q$ : per le (2.1), infatti, il taglio ammette un andamento lineare e il momento uno parabolico. Quindi, per tracciare il diagramma del primo occorrono ora due informazioni; tre per il diagramma del secondo. Le informazioni per il diagramma del momento sono diverse: innanzitutto, è noto che il momento debba annullarsi in  $C$  e assumere il valore  $3ql^2/4$  in  $D$  essendo tale il valore che si raggiunge sul tratto  $D-E$ . Inoltre, tracciato il diagramma del taglio, sono note le tangenti alla curva del momento in ogni punto, e in particolare laddove il taglio si annulla il momento ha un punto a tangenza orizzontale.

Si noti, infine, che per la continuità del taglio a cavallo della cerniera  $C$ , il dia-

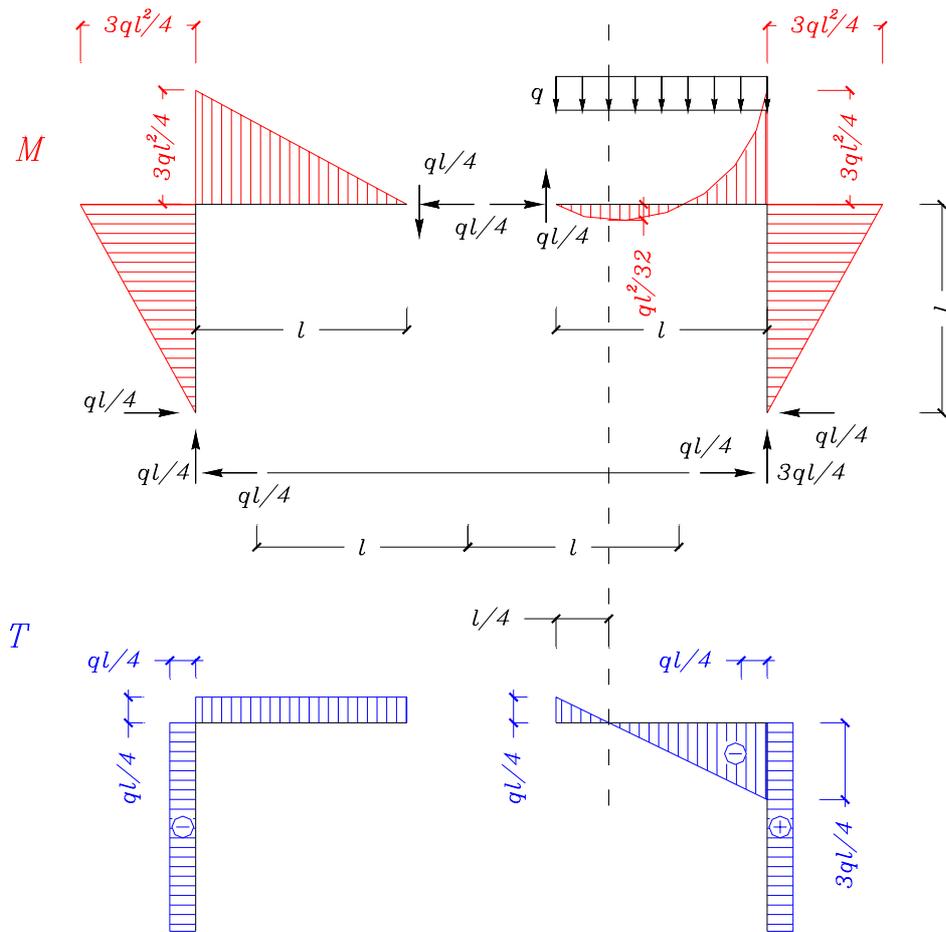


Figura 2.18: diagrammi della sollecitazione dello schema di Figura 2.17.

gramma del momento passa da legge lineare a parabolica conservando la tangenza in  $C$  stesso.

### 2.1.7 Esempio 7

Calcolare i diagrammi della sollecitazione per la struttura di Figura 2.17, scrivendo le relative leggi in modo diretto.

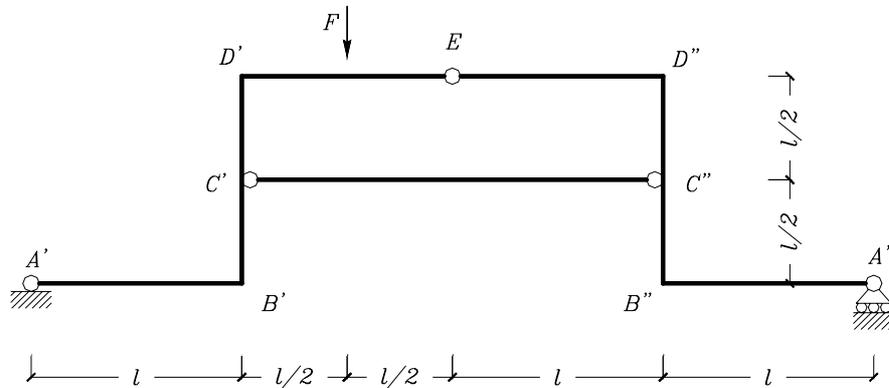


Figura 2.19: schema isostatico.

Si proceda, anche in questo caso, come fatto nell'esempio precedente, tracciando cioè i diagrammi della sollecitazione direttamente sulla struttura di cui sono state già calcolate le reazioni vincolari. Su ogni tratto della struttura non sono presenti carichi distribuiti per cui i diagrammi del taglio e del momento sono al più costanti e lineari rispettivamente. In particolare, sul pendolo interno  $C' - C''$  sono entrambi nulli e c'è solo uno sforzo normale di trazione costante pari a  $3F/2$ .

Al di là, quindi, del tratto  $D' - E$ ,  $B' - D'$  e  $B'' - D''$ , in cui sono presenti forze concentrate, i diagrammi sui restanti tratti hanno l'andamento riportato in Figura 2.20, ottenuto con valutazioni simili a quelle fatte per l'esempio precedente. Sul tratto  $D' - E$ , invece, si sviluppa un salto del diagramma del taglio in corrispondenza della forza esterna  $F$  che fa sì che il diagramma del momento abbia una cuspidè nella stessa sezione. Comportamento analogo si ha per gli altri due tratti  $B' - D'$  e  $B'' - D''$ , nei quali in  $C'$  e  $C''$  agiscono delle forze concentrate esplicitate dal pendolo  $C' - C''$ .

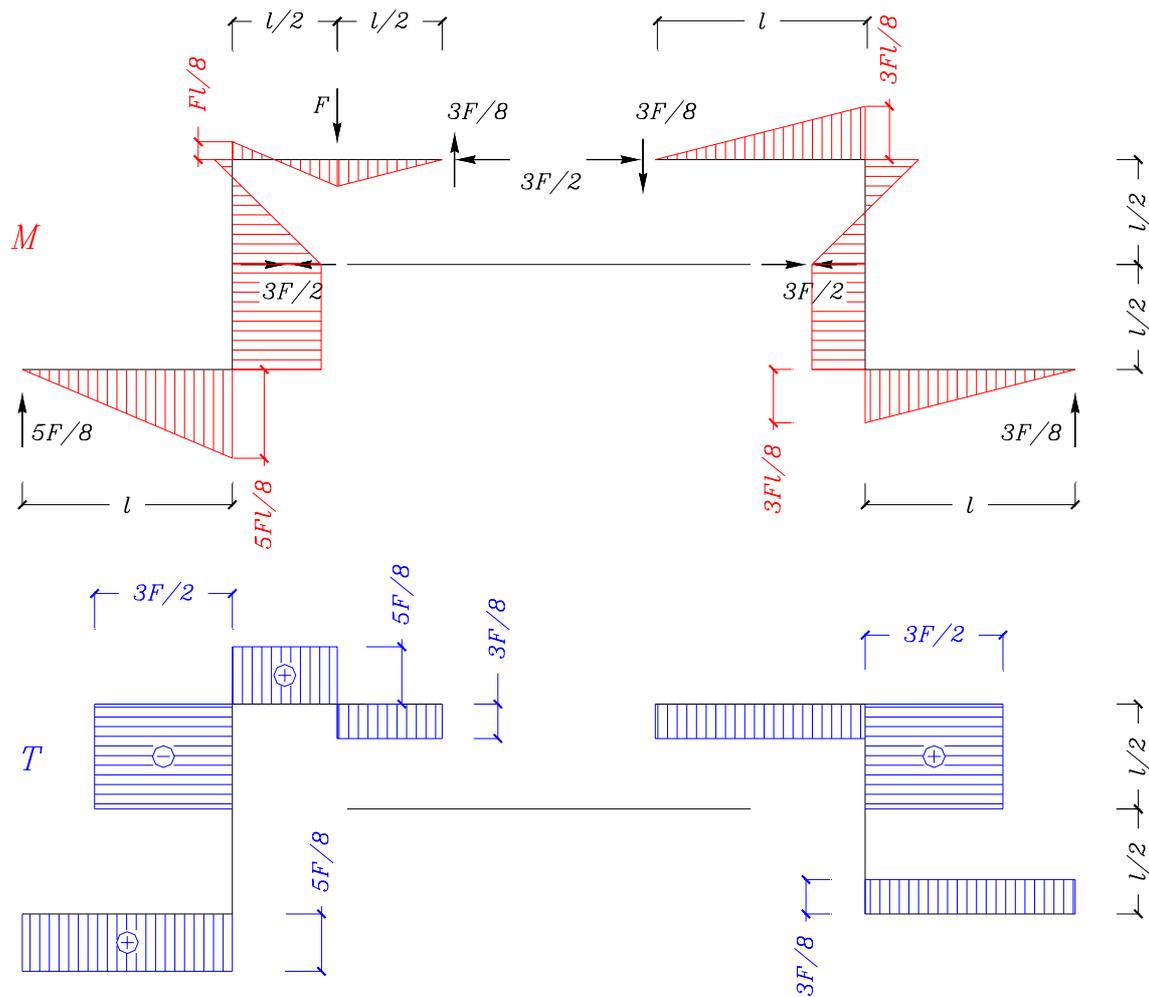


Figura 2.20: diagrammi della sollecitazione dello schema di Figura 2.19.

## 2.2 Procedimento grafico

### 2.2.1 Esempio 1

Calcolare i diagrammi della sollecitazione per la struttura di Figura 2.21, utilizzando il procedimento grafico.

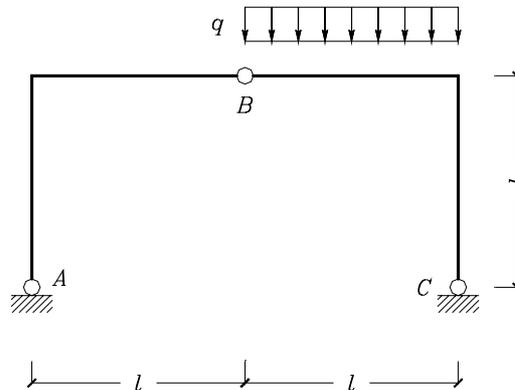


Figura 2.21: schema isostatico.

Nel procedimento grafico ci si affida ai teoremi di sistemi di forze equivalenti a zero, attraverso i quali, cioè, si determinano le condizioni di equilibrio di sistemi di due o più enti-forza.

L'esempio in esame è un classico caso di arco a tre cerniere. Nel tratto  $A - B$  non agiscono altre forze se non le reazioni vincolari esplicitate dalle due cerniere in  $A$  e  $B$ : ciascuna di queste può giacere su una generica retta passante per la cerniera stessa. Poichè, quindi, un sistema costituito da sole due sole forze è equivalente a zero se e solo se le forze agiscono lungo una stessa retta e sono uguali e contrarie, l'unico modo per cui il tratto  $A - B$  siano in equilibrio è che la retta su cui giacciono le reazioni vincolari passi per i punti  $A$  e  $B$  (v. Figura 2.22). In generale, quindi, quando un qualsiasi corpo rigido di una struttura è vincolato tramite sole cerniere, le reazioni esplicitate da queste giacciono sulla congiungente le due cerniere.

Analogo discorso, invece, non può farsi per il corpo  $B - C$  in cui sono presenti sì due cerniere ma agisce anche un carico. In particolare, questo è uniformemente distribuito per una lunghezza  $l$  ed ha risultante  $ql$  passante per  $l/2$ . Tale forza agisce su una retta che si interseca in  $P$  con quella della reazione della cerniera in  $B$ . Il sistema di forze nel corpo  $B - C$  si completa con la reazione della cerniera in  $C$ . Perchè, quindi, tale sistema costituito sia equivalente a zero deve essere che le tre forze agiscono lungo rette che abbiano un punto in comune (nell'esempio,  $P$ ): ciò, si ricorda, garantisce che il sistema abbia momento risultante nullo. Per avere anche risultante nullo, le forze devono chiudere il poligono che definiscono rincorrendosi con i versi, così come riportato a latere della Figura 2.22. Su questo poligono, è noto modulo e verso della risultante del carico e possono, quindi, essere misurati i moduli e stabiliti i versi anche delle reazioni vincolari.

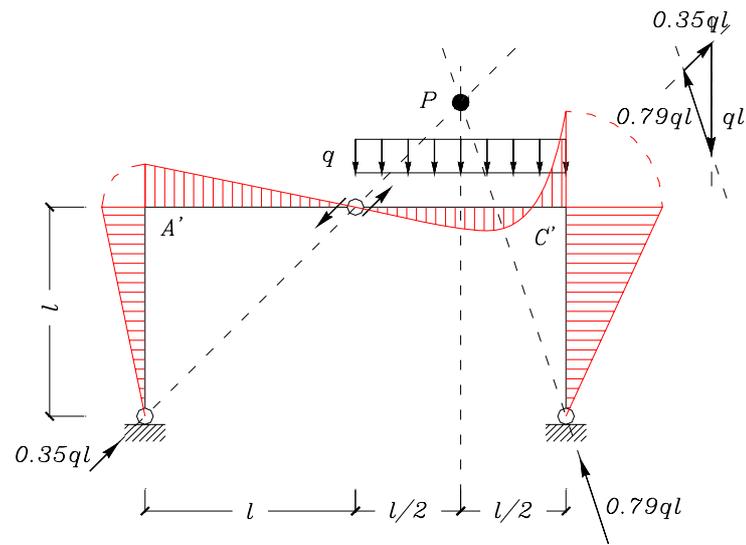


Figura 2.22: diagrammi della sollecitazione dello schema di Figura 2.21.

Si può, dunque, tracciare il diagramma del momento; si lascia come esercizio quello del taglio e dello sforzo normale. A partire da  $A$  e da  $C$  valgono le stesse considerazioni fatte nei due esempi precedenti: le reazioni vincolari calcolate esplicano dei momenti che tendono le fibre esterne ed hanno andamento lineare con valore nullo nelle cerniere. Nei nodi  $A'$  e  $C'$  i diagrammi così ottenuti possono essere ribaltati perchè non sono presenti momenti concentrati. Da  $C'$  il momento prosegue lineare e si annulla in  $B$ , da cui prosegue parabolico con iniziale tangente fissata, e cioè inclinata come il diagramma su  $A' - B$ .

### 2.2.2 Esempio 2

Calcolare i diagrammi della sollecitazione per la struttura di Figura 2.23, utilizzando il procedimento grafico.

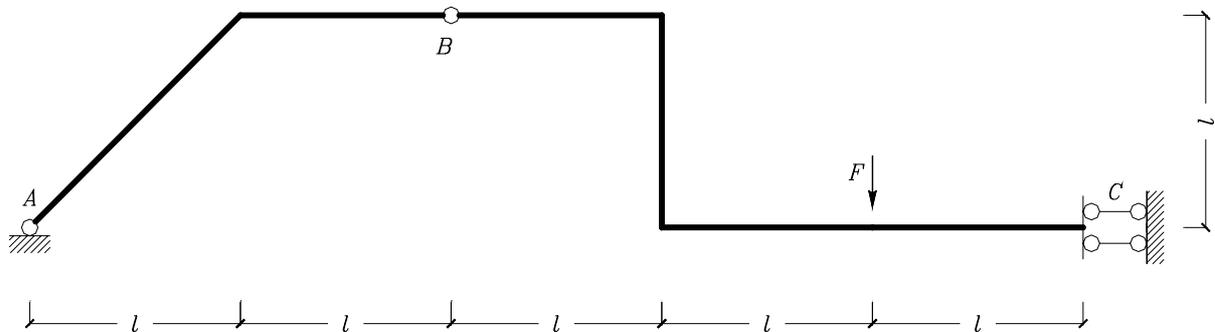


Figura 2.23: schema isostatico.

Anche in questo caso valgono per il tratto  $A - B$  le stesse considerazioni fatte nell'analogo tratto dell'esempio precedente. Le reazioni vincolari agiscono sulla retta che passa per le cerniere in  $A$  e  $B$ . Sul tratto  $B - C$ , l'equilibrio è garantito imponendo che la reazione del doppio pendolo in  $C$  passi per il punto  $P$  (v. Figura 2.24), ottenuto per intersezione della retta relativa alla reazione in  $B$  e quella su cui agisce il carico concentrato  $F$ . Si ricorda che il doppio pendolo esplica in generale una reazione disposta su di una qualunque retta parallela al proprio asse. Chiuso, quindi, il poligono definito da queste tre forze, si osservi in particolare che la reazione del doppio pendolo vale  $2F$  e passa per  $P$ ; il doppio pendolo, cioè, esplica una reazione  $2F$  passante per  $C$  ed un momento di senso antiorario pari a  $2F \cdot 2l$ .

Nel tracciare il diagramma del momento valgono ancora le considerazioni fatte fin qui. Si noti, in particolare, che, seguendo l'andamento del diagramma a partire da  $B$  lungo la spezzata che definisce il corpo  $B - C$ , l'unica azione presente è la reazione della cerniera in  $B$  finché non si incontra la forza concentrata  $F$ . Ciò significa che il momento è indotto solo da questa azione e sarebbe, in particolare, nullo nei punti  $P'$  e  $A$  se il corpo  $B - C$  passasse anche per questi punti. Questa osservazione permette di valutare direttamente l'inclinazione dei diagrammi del momento, essendo questi ovunque lineari.

Su noti, infine, che in corrispondenza della forza applicata il momento ha una cuspidè, e da questa sezione in poi prosegue fino al doppio pendolo in  $C$  in modo costante con valore  $4Fl$ , poichè l'asse del vincolo e quello del tratto del corpo coincidono e, quindi, il doppio pendolo, oltre ad un momento costante, non esplica azioni di taglio sul tratto ma solo assiali.

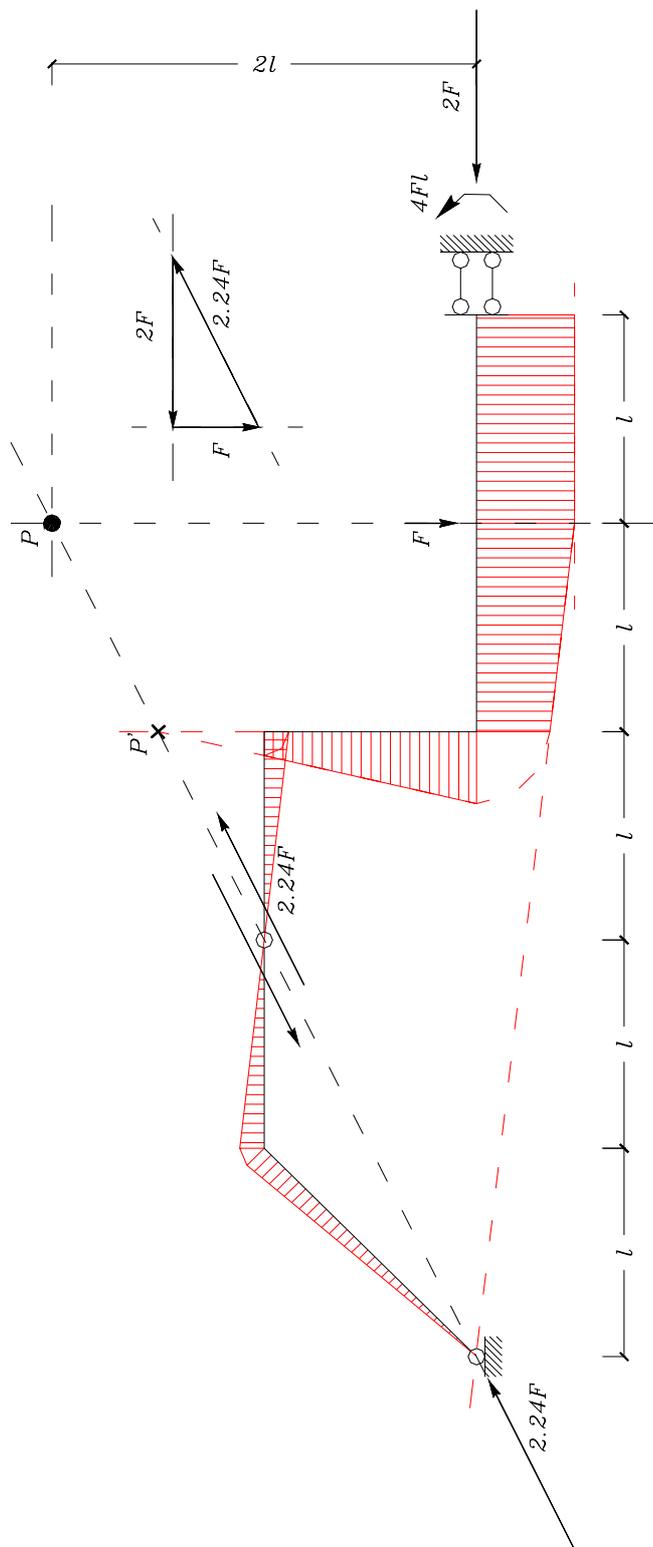


Figura 2.24: diagrammi della sollecitazione dello schema di Figura 2.23.

### 2.2.3 Esempio 3

Calcolare i diagrammi della sollecitazione per la struttura di Figura 2.25, utilizzando il procedimento grafico.

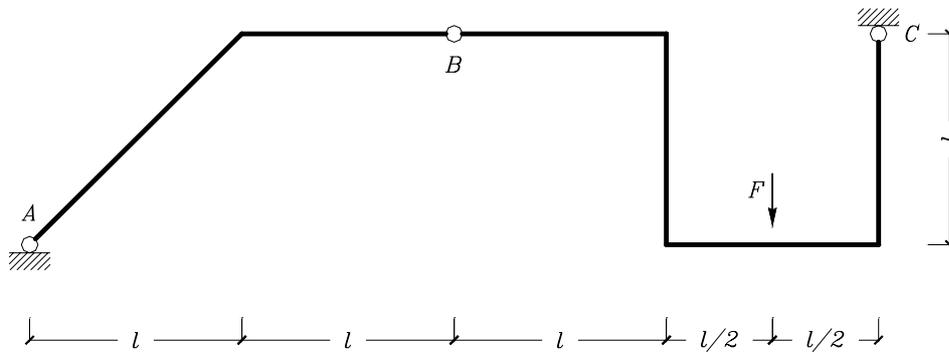


Figura 2.25: schema isostatico.

Rispetto al precedente, l'esempio in esame è simile salvo che è presente sulla struttura una cerniera in  $C$  al posto del doppio pendolo. Pertanto con analoghe considerazioni si arriva a determinare il punto  $P$  da cui passano le rette delle reazioni vincolari e della forza  $F$ .

Per quanto riguarda il diagramma del momento, anche in questo caso per tracciare il corretto andamento lineare, a partire da  $B$  e muovendosi verso  $C$  lungo il corpo fino ad arrivare alla forza concentrata, è possibile aiutarsi utilizzando il fatto che la reazione vincolare  $0.56F$  in  $B$  passa per  $A$  e per  $P'$  sul prolungamento ideale dei tratti rettilinei. Analogo il ragionamento nel tracciare il diagramma a partire da  $C$  e muovendosi fino ad incontrare la forza concentrata, per il fatto che la reazione in  $C$  passa per  $P''$ .

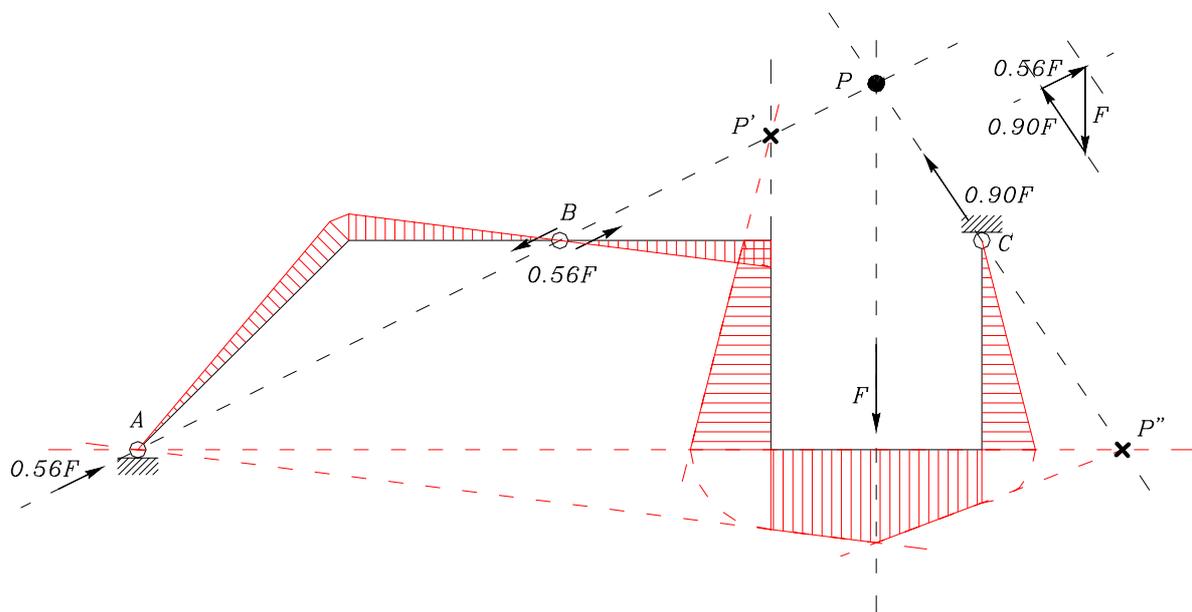


Figura 2.26: diagrammi della sollecitazione dello schema di Figura 2.25.

### 2.2.4 Esempio 4

Calcolare i diagrammi della sollecitazione per la struttura di Figura 2.27, utilizzando il procedimento grafico.

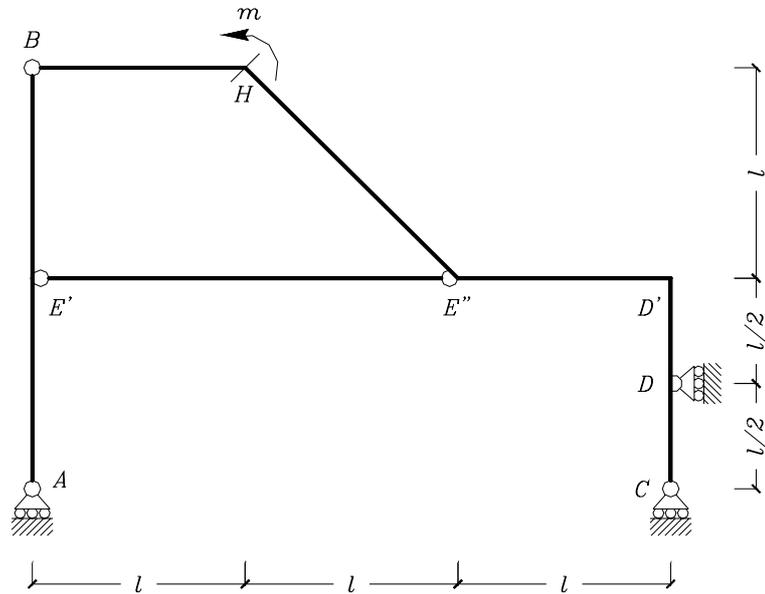


Figura 2.27: schema isostatico.

L'esempio differisce dai precedenti per la presenza di un momento concentrato posto in corrispondenza della sezione nel nodo  $H$ . Inoltre, il tratto  $A - B$  è soggetto alla azione orizzontale del pendolo  $E' - E''$ , alla reazione verticale del carrello e quella della cerniera in  $A$ , la quale per essere in equilibrio con queste due deve passare per  $E'$  e quindi agire lungo la verticale così come la reazione del carrello; pertanto, l'unico modo perchè esista equilibrio è che il pendolo  $E' - E''$  sia scarico (v. Figura 2.28).

Se si guarda ora all'equilibrio dell'intera struttura bisogna concludere che anche il carrello in  $D$  espliciti una reazione nulla, in quanto un'azione orizzontale non può essere equilibrata da qualunque altra. Il carrello in  $C$  esplicita, invece, una reazione verticale uguale e contraria a quella esplicita dal carrello in  $A$ , generando così una coppia che si opponga al momento  $m$  cui è soggetta la struttura.

Il diagramma del momento, pertanto, può essere presente solo sul tratto che va dalla cerniera in  $B$  al nodo  $D'$ . In particolare, in corrispondenza del nodo  $H$  il diagramma ha un salto di valore pari a  $m$  e, quindi, non può ribaltarsi a cavallo del nodo stesso. L'equilibrio di questo nodo è visualizzato a latere della struttura in Figura 2.28.

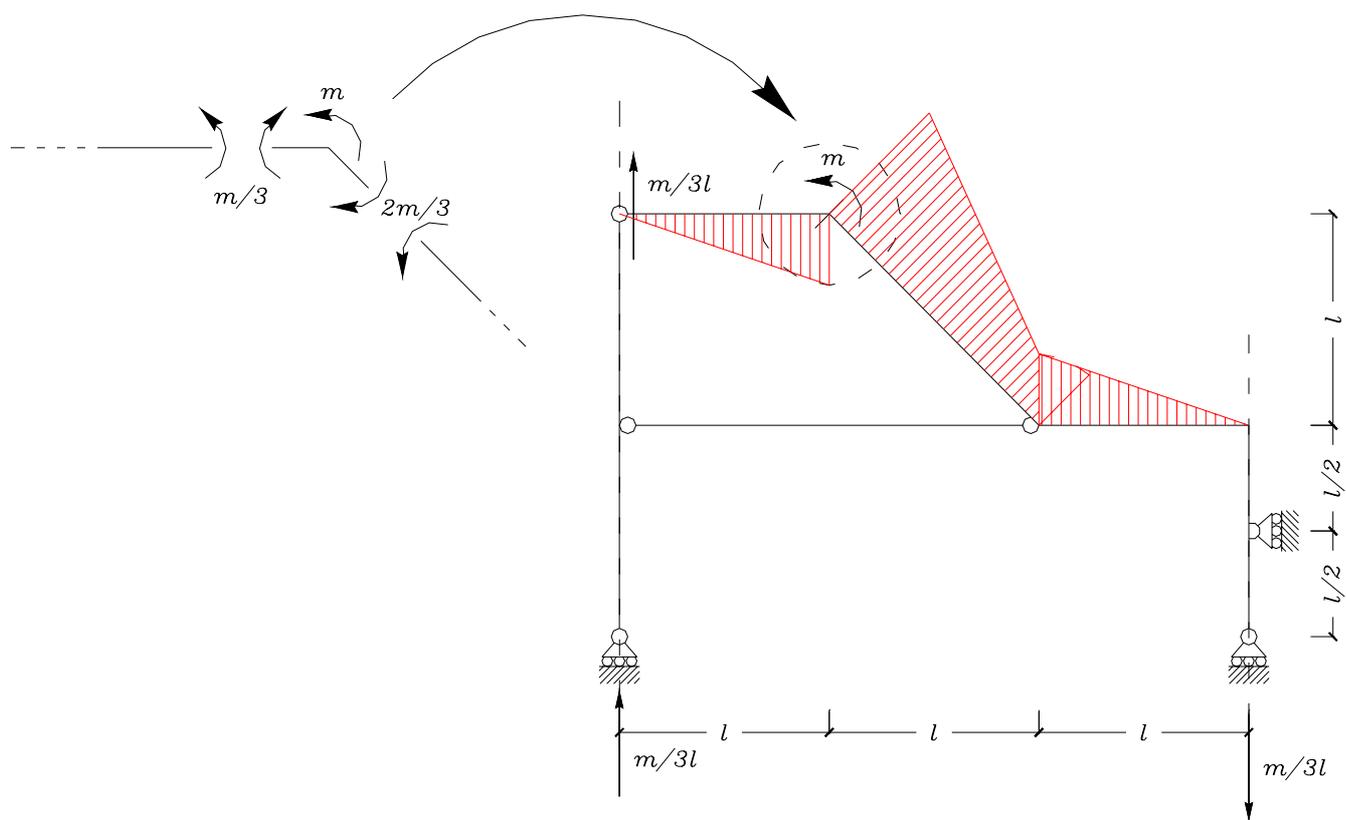


Figura 2.28: diagrammi della sollecitazione dello schema di Figura 2.27.