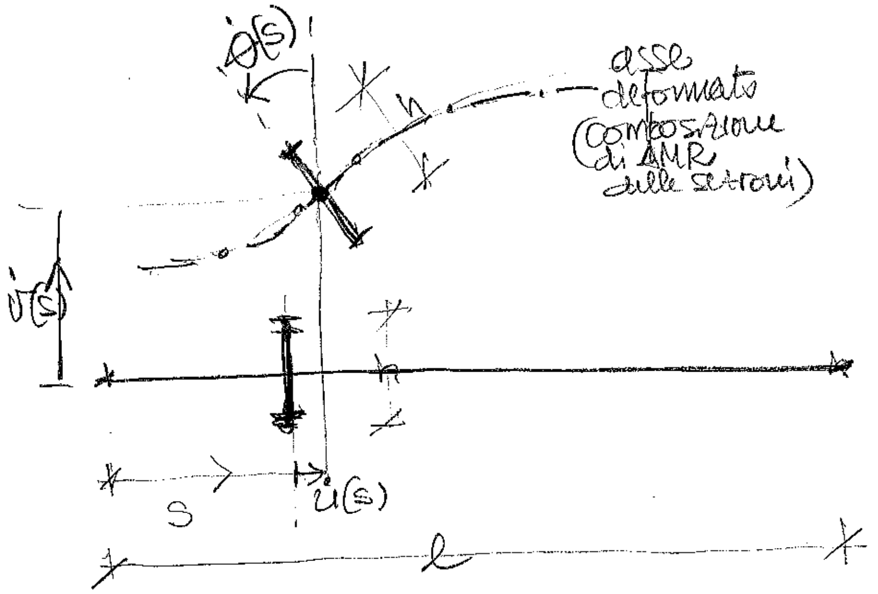
# Introduzione all'EQUILIBRIO di TRAVI DEFORMABILI

## DEFINIZIONE CINEMATICA

IPOTESI di SEZIONI RIGIDE

$\Rightarrow$ DEFORMAZIONE del solo ASSE

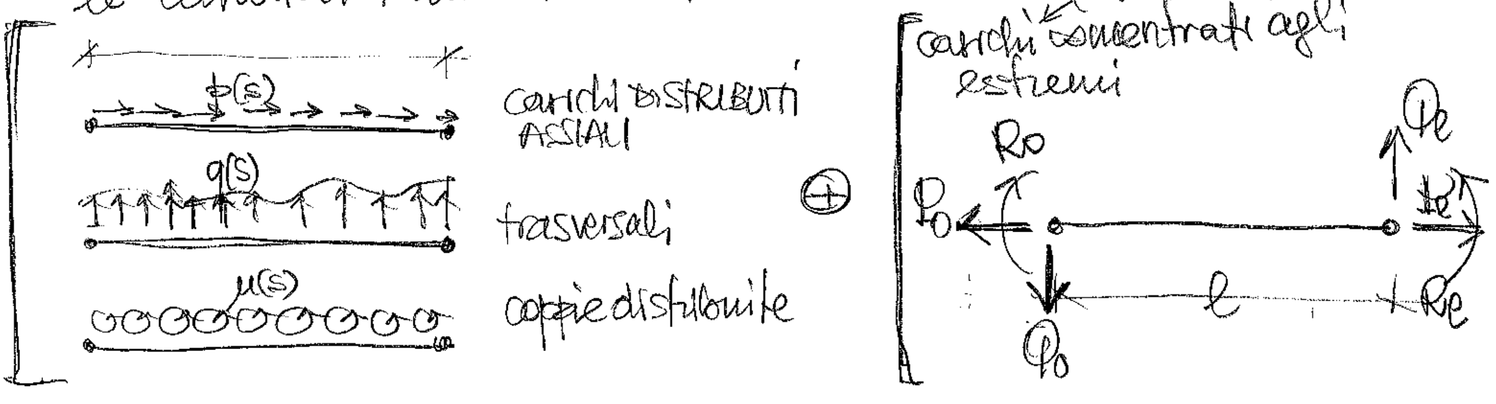



$\dot u(s), \dot v(s), \dot\theta(s)$
Atto di Moto RIGIDO di una generica sezione in $s$

NB se (tutta) la trave è soggetta a un AMR deve essere

$$\begin{cases} \dot u(s) = \dot u_T & \text{(velocità assiale costante lungo } s\text{, cioè velocità TRASLAZIONE)} \\ \dot v(s) = \dot v_T + \dot\theta_R\, s & (1) \\ \dot\theta(s) = \dot\theta_R \end{cases}$$

Si ipotizzano (in modo DUALE) tante caratteristiche carico quante sono le caratteristiche cinematiche



Potenza spesa dai carichi agenti per la cinematica della trave assunta:

$$= \int_0^\ell \{ p(s)\dot{u}(s) + q(s)\dot{v}(s) + \mu(s)\dot{\theta}(s) \} ds \qquad (2)$$

$$+ \left[ P_\ell \dot{u}_\ell + Q_\ell \dot{v}_\ell + R_\ell \dot{\theta}_\ell - (P_0 \dot{u}_0 + Q_0 \dot{v}_0 + R_0 \dot{\theta}_0) \right]$$

se c'è un AMR della trave (1) + si ha l'EQUILIBRIO del corpo rigido imponendo Potenza nulla

$$\dot{u}_\ell = \dot{u}_0 = \dot{u}_T \qquad \dot{\theta}_\ell = \dot{\theta}_0 = \dot{\theta}_R \qquad \dot{v}_0 = \dot{v}_T \qquad \dot{v}_\ell = \dot{v}_T + \dot{\theta}_R \ell \qquad (3)$$

$$= \left\{ \int_0^\ell p(s)\,ds + [P_\ell - P_0] \right\} \dot{u}_T + \left\{ \int_0^\ell q(s)\,ds + [Q_\ell - Q_0] \right\} \dot{v}_T + \qquad (4)$$

$$+ \left\{ \int_0^\ell (q(s)s + \mu(s))\,ds + [R_\ell - R_0] + Q_\ell \ell \right\} \dot{\theta}_R$$

ponendo $= 0 \quad \forall\, \dot{u}_T, \dot{v}_T, \dot{\theta}_R$

si hanno le equazioni cardinali di equilibrio, cioè risultante e momento risultante nulli

$0 = (3)$ infatti implica

$$\begin{cases} \int_0^\ell p(s)\,ds + P_\ell - P_0 = 0 \\ \int_0^\ell q(s)\,ds + Q_\ell - Q_0 = 0 \\ \int_0^\ell (q(s)s + \mu(s))\,ds + M_\ell - M_0 + Q_\ell \ell = 0 \end{cases} \qquad (5)$$

$C \equiv s = 0$

se si introducono, sempre in (2), le sollecitazioni tramite le equazioni indefinite di equilibrio

$$\begin{cases} N'(s)+p(s)=0 \\ T'(s)+q(s)=0 \\ M'(s)+T(s)+\mu(s)=0 \end{cases} \quad (6)$$

si ha
per lo stesso AMR (1)+(3)

$$\begin{cases} 0 = P_\ell - P_0 - \int_0^\ell N'(s)\,ds \equiv P_\ell - P_0 - [N(\ell)-N(0)] \\ 0 = Q_\ell - Q_0 - \int_0^\ell T'(s)\,ds \equiv Q_\ell - Q_0 - [T(\ell)-T(0)] \\ 0 = R_\ell - R_0 + Q_\ell \ell - \int_0^\ell (T'(s)s + T(s))\,ds - \int_0^\ell M'(s)\,ds \end{cases} \quad (7)$$

$$\equiv R_\ell - R_0 + Q_\ell \ell - [M(\ell)-M(0)] - [T(\ell)\ell]$$

$$\int_0^\ell (T's+T)\,ds \equiv \int_0^\ell \{(Ts)' - T + T\}\,ds \equiv \int_0^\ell (Ts)'\,ds$$

$$(Ts)' = T's + T$$

La (7) dimostra che N, T, M agli estremi di un tratto continuo sono pari ai carichi concentrati presenti

$$N(\ell)=P_\ell \,, \quad N(0)=P_0$$

$$T(\ell)=Q_\ell \,, \quad T(0)=Q_0$$

$$M(\ell)=R_\ell \,, \quad M(0)=R_0$$

Se pertanto si assumono note N, T, M agli estremi, la potenza (2) scritta per un generico atto di moto (non necessariamente rigido)

$$(2) = \int_0^l \{ p(s)\,\dot{u}(s) + q(s)\,\dot{v}(s) + \mu(s)\dot{\theta}(s) \} ds + \Big[ N\dot{u} + T\dot{v} + M\dot{\theta} \Big]_0^l \quad (8)$$

fornisce AUTOMATICAMENTE l'equilibrio di ~~corpo rigido~~ rigido (come (6)) imponendo semplicemente la cinematica rigida (1) _

Infatti, tenendo conto delle equivalenze seguenti

$$\Big[N\dot{u}\Big]_0^l = \int_0^l \{ N'(s)\dot{u}(s) + N(s)\dot{u}'(s) \} ds$$

$$\Big[T\dot{v}\Big]_0^l = \int_0^l \{ T'(s)\dot{v}(s) + T(s)\dot{v}'(s) \} ds$$

si aggiunga $T(s)\dot{\theta}(s) - T(s)\dot{\theta}(s)$

$$\Big[M\dot{\theta}\Big]_0^l = \int_0^l \{ M'(s)\dot{\theta}(s) + M(s)\dot{\theta}'(s) \} ds$$

la (8) diventa

$$(8) = \int_0^l \{ p(s) + N'(s) \} \dot{u}(s) ds + \int_0^l \{ q(s) + T'(s) \} \dot{v}(s) ds +$$

$$+ \int_0^l \{ \mu(s) + M'(s) + T(s) \} \dot{\theta}(s) ds \qquad (9)$$

$$+ \int_0^l N(s)\dot{u}'(s) ds + \int_0^l T(s)\big(\dot{v}'(s) - \dot{\theta}(s)\big) ds + \int_0^l M(s)\dot{\theta}'(s) ds$$

e imponendo (1), che implica anche $\dot{u}'(s) = \dot{\theta}'(s) = 0$ e
$\dot{v}'(s) - \dot{\theta}(s) = \dot{\theta}_R - \dot{\theta}_R = 0$

la (8), e quindi la (9), fornisce l'EQUILIBRIO (6), se posta $= 0 \quad \forall$ AMR (1)

Se invece l'atto di moto non è rigido, vuol dire che

$$\dot{u}(s)' \neq 0$$
$$\dot{\theta}'(s) \neq 0 \qquad (10)$$
$$\dot{v}'(s) \neq \dot{\theta}(s)$$

Allora per avere un EQUILIBRIO, cioè (8) = 0, è necessario sottrarre alla (8) l'ultima riga della (9) di aliquote di potenza.

In altri termini, la seguente potenza è sempre nulla (cioè c'è EQUILIBRIO) qualunque sia l'atto di moto della trave

$$0 = \int_0^\ell \{p(s)\dot{u}(s) + q(s)\dot{v}(s) + \mu(s)\dot{\theta}(s)\}ds + \left[N\dot{u} + T\dot{v} + M\dot{\theta}\right]_0^\ell$$
$$- \int_0^\ell \{N(s)\dot{u}'(s) + T(s)(\dot{v}'(s) - \dot{\theta}(s)) + M(s)\dot{\theta}'(s)\}ds \qquad (11)$$

Quest'ultimo termine definisce le misure di "quanto il moto non è rigido", cioè le DEFORMAZIONI

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}(s) = \dot{u}'(s) & \text{Atto di deformazione "ASSIALE"} \\ \dot{\chi}(s) = \dot{\theta}'(s) & \text{———— "FLESSIONALE"} \\ \dot{\gamma}(s) = \dot{v}'(s) - \dot{\theta}(s) & \text{———— "TRASVERSALE" (o di TAGLIO)} \end{cases} \qquad (12)$$

Ciascuna (atto di) deformazione è una caratteristica cinematica DUALE a una caratteristica dinamica (SOLLECITAZIONE)

cioè è ancora una potenza

$$\int_0^\ell \{N(s)\dot{\varepsilon}(s) + T(s)\dot{\gamma}(s) + M(s)\dot{\chi}(s)\}ds \qquad (13)$$

Il termine (13) è detto POTENZA INTERNA ($P_{int}$)
Il termine (8) è detto POTENZA ESTERNA ($P_{est}$)

Il principio di Potenza (o di "BILANCIO") che attesta un EQUILIBRIO sulla trave si enuncia

(14) $$\boxed{P_{est} - P_{int} = 0}$$

$\forall$ Atto di Moto Rigido (AMR come (1)) e $\forall$ Atto di moto Deformativo (AMD come (12))

(15a) $$P_{est} \overset{(8)}{=} \int_0^\ell \{ p(s)\dot{u}(s) + q(s)\dot{v}(s) + \mu(s)\dot{\theta}(s) \} ds + \left[ N\dot{u} + T\dot{v} + M\dot{\theta} \right]_0^\ell$$

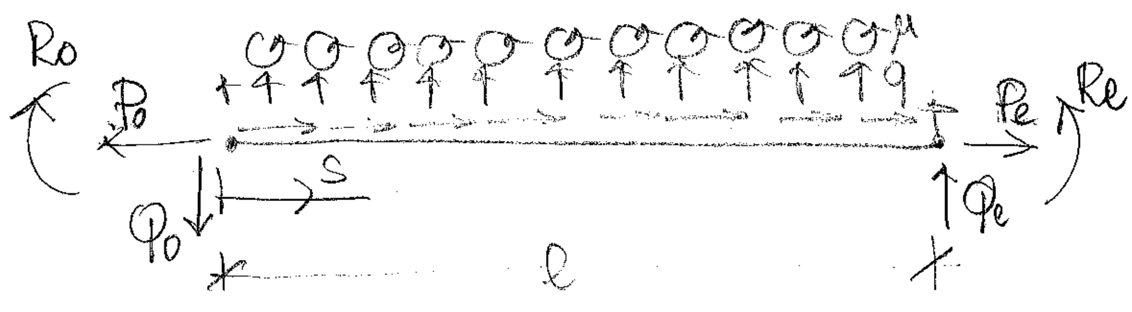
(15b) $$P_{int} \overset{(13)}{=} \int_0^\ell \{ N(s)\dot{\varepsilon}(s) + T(s)\dot{\gamma}(s) + M(s)\dot{\chi}(s) \} ds$$

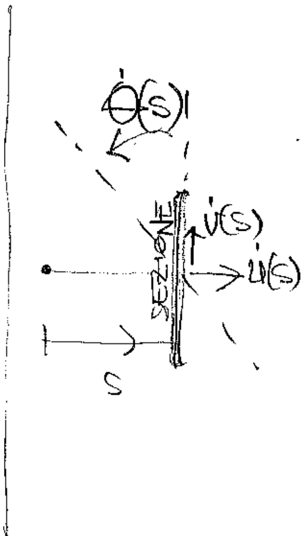
---

NB
La forma della (15a) è nell'espressione più generale

(16) $$P_{est} = \int_0^\ell \{ p(s)\dot{u}(s) + q(s)\dot{v}(s) + \mu(s)\dot{\theta}(s) \} ds + \left[ P_\ell \dot{u}(\ell) - P_0 \dot{u}(0) + Q_\ell \dot{v}(\ell) - Q_0 \dot{v}(0) + R_\ell \dot{\theta}(\ell) - R_0 \dot{\theta}(0) \right]$$

considerati come dati i carichi



Il principio di Bilancio (14) attesta una **DUALITÀ** tra la descrizione cinematica e la descrizione dinamica, nel senso che:

> da un'ipotesi cinematica
> il principio fa discendere
> una precisa condizione dinamica
> (e viceversa)

---

**descrizione cinematica**

• grandezze: $\dot{u}(s),\ \dot{v}(s),\ \dot{\theta}(s)$ (cinematica della sezione rigida)

$\dot{\varepsilon}(s),\ \dot{\gamma}(s),\ \dot{\chi}(s)$ (deformazioni)

•• condizioni: (dette di "COMPATIBILITÀ")

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}(s) = \dot{u}'(s) \\ \dot{\gamma}(s) = \dot{v}'(s) - \dot{\theta}(s) \\ \dot{\chi}(s) = \dot{\theta}'(s) \end{cases} \qquad (17)$$

---

**descrizione dinamica**

• grandezze: $N(s),\ T(s),\ M(s)$ (sollecitazioni)

•• condizioni: ("EQUILIBRIO") INTERNO

$$\begin{cases} N'(s) + p(s) = 0 \\ T'(s) + q(s) = 0 \\ M'(s) + \mu(s) + T(s) = 0 \end{cases} \qquad (18a)$$

("EQUILIBRIO" AL BORDO O ESTERNO)

$$\begin{cases} N(0) = P_0\ ;\ N(\ell) = P_\ell \\ T(0) = -Q_0\ ;\ T(\ell) = M_\ell \\ M(0) = -R_0\ ;\ M(\ell) = R_\ell \end{cases} \qquad (18b)$$

---

## Dimostrazione della condizione di DUALITÀ

se si ipotizzano grandezze cinematiche COMPATIBILI (17) la $P_{int}$ (15b) può essere riscritta

$$P_{int} = \int_0^l \{ N(s)\,\dot{u}'(s) + T(s)\left(\dot{v}'(s) - \dot{\theta}(s)\right) + M(s)\,\dot{\theta}'(s) \}\,ds$$

$$= \left[ N(s)\dot{u}(s) + T(s)\dot{v}(s) + M(s)\dot{\theta}(s) \right]_0^l +$$

$$- \int_0^l \{ N'(s)\dot{u}(s) + T'(s)\dot{v}(s) + \left(M'(s) + T(s)\right)\dot{\theta}(s) \}\,ds$$

$$\int_a^b f g'\,dx = \int_a^b (fg)'\,dx + - \int_a^b f' g\,dx = [fg]_a^b + - \int_a^b f' g\,dx$$

quindi il bilancio (14) tra $P_{est}$ (come la (16) e la $P_{int}$ così riscritta risulta

$$0 = P_{est} = P_{int}$$

$$= \int_0^l \{ \left(N'(s) + p(s)\right)\dot{u}(s) + \left(T'(s) + q(s)\right)\dot{v}(s) + \left(M'(s) + T(s) + \mu(s)\right)\dot{\theta}(s) \}\,ds$$

$$+ \left(P_l - N(l)\right)\dot{u}(l) + \left(P_0 - N(0)\right)\dot{u}(0) +$$

$$+ \left(Q_l - T(l)\right)\dot{v}(l) + \left(Q_0 - T(0)\right)\dot{v}(0)$$

$$+ \left(R_l - M(l)\right)\dot{\theta}(l) + \left(R_0 - M(0)\right)\dot{\theta}(0) \qquad \forall\, \dot{u}(s), \dot{v}(s), \dot{\theta}(s) \text{ COMPATIBILI}$$

e quindi se il bilancio di potenza è nullo $\forall$ cinematica compatibile si ricavano da questo le equazioni di equilibrio (18a) e (18b) se invece si ipotizzano grandezze dinamiche EQUILIBRATE (18) la Pest (16) può essere riscritta

$$P_{est} = \int_0^l \{ -N'(s)\dot{u}(s) - T'(s)\dot{v}(s) - (M'(s)+T(s))\dot{\theta}(s) \} ds + \left[ N(s)\dot{u}(s) + T(s)\dot{v}(s) + M(s)\dot{\theta}(s) \right]_0^l$$

$\int_a^b -f'g\,dx = -[fg]_a^b + \int_a^b fg'\,dx$

$$= \int_0^l \{ N(s)\dot{u}'(s) + T(s)\dot{v}'(s) + M(s)\dot{\theta}'(s) - T(s)\dot{\theta}(s) \} ds$$

imponendo ora il bilancio risulta (con Pint come la (15b))

$$0 = P_{est} - P_{int}$$

$$= \int_0^l \{ N(s)\left(\dot{u}'(s) - \dot{\varepsilon}(s)\right) + T(s)\left(\dot{v}'(s) - \dot{\theta}(s) - \dot{\gamma}(s)\right) + M(s)\left(\dot{\theta}'(s) - \dot{\chi}(s)\right) \} ds$$

$\forall N, T, M$ equilibrate

e quindi, di nuovo, se il bilancio è nullo $\forall$ dinamica equilibrata, si ricavano da questo le equazioni di compatibilità (17)