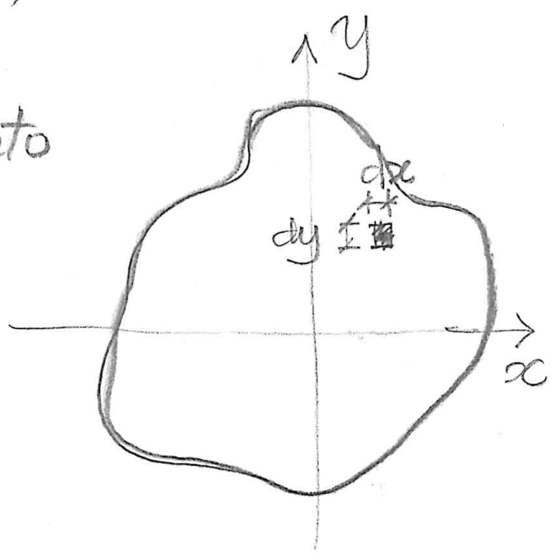
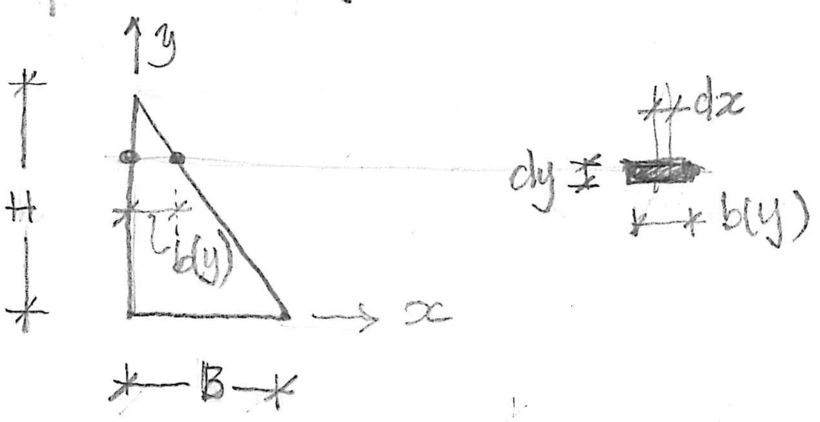
GEOMETRIA delle FIGURE PIANE
(o delle AREE)

Si definiscono funzioni $f(x,y)$ nel dominio della figura.
Un punto è anche rappresentato come un infinitesimo $dx\,dy$



1) AREA : $A = \iint_{yx} dx\,dy$

esempio 1: triangolo



$\int_x dx = b(y)$

$$b(y) = B - \frac{B}{H}y$$

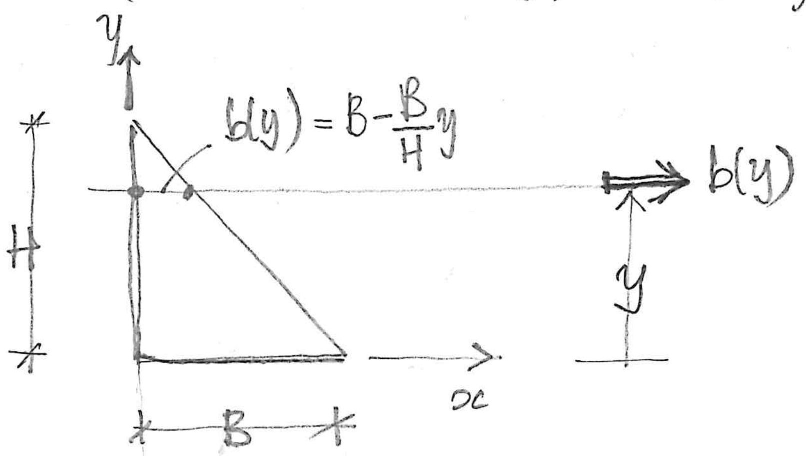
$$A = \int_0^H b(y)\,dy = \int_0^H B\,dy - \int_0^H \frac{B}{H} y\,dy$$

$$= BH - \frac{B}{\cancel{H}}\frac{H^{\cancel{2}}}{2} = \frac{BH}{2}$$

2_ MOMENTO STATICO : S

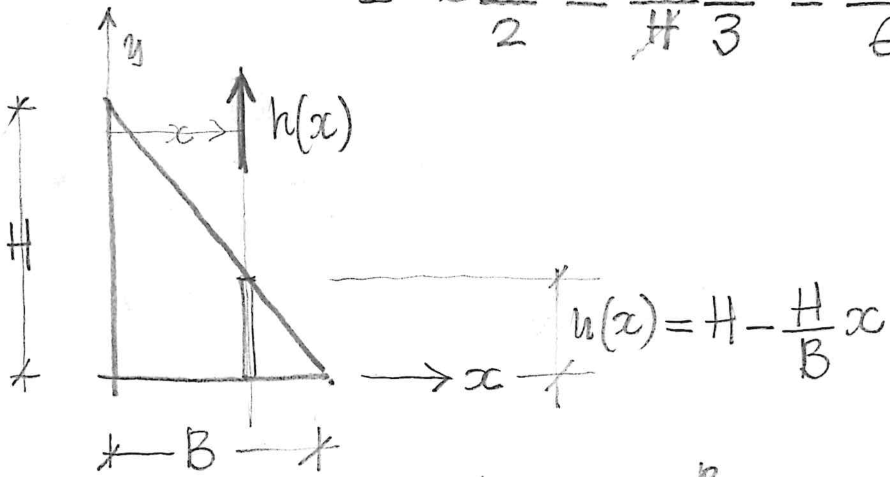
(rispetto all'asse x) : $S_x = \iint y\,dA$

(——— y) : $S_y = \iint x\,dA$



$$S_x = \int_0^H b(y)\,y\,dy = \int_0^H By\,dy - \int_0^H \frac{B}{H}y^2 dy$$

$$= B\frac{H^2}{2} - \frac{B}{\cancel{H}}\frac{H^{\cancel{3}\,2}}{3} = \frac{BH^2}{6}$$



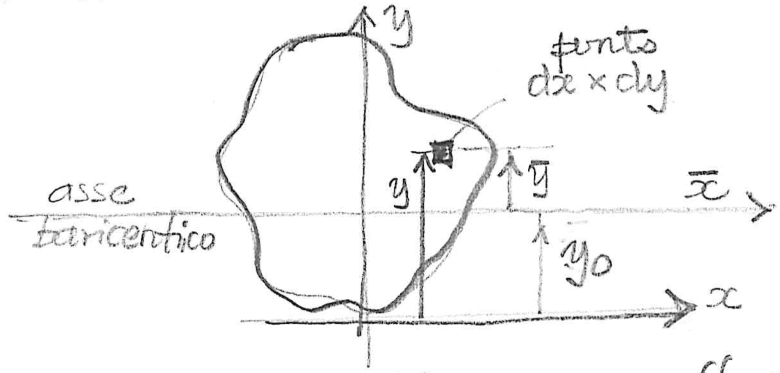
$$S_y = \int_0^B h(x)\,x\,dx = \int_0^B Hx\,dx - \int_0^B \frac{H}{B}x^2 dx$$

$$= H\frac{B^2}{2} - \frac{H}{\cancel{B}}\frac{B^{\cancel{3}\,2}}{3} = \frac{HB^2}{6}$$

3_ ASSE BARICENTRICO

Asse per il quale il momento statico S è nullo.
Mutuando le aree infinitesime in forze/peso, l'Area di una figura è il peso (totale); l'asse baricentrico è quindi l'asse delle forze peso, cioè l'asse su cui posizionare il peso come unica forza risultante (vedi, RIDUZIONE A SISTEMI di FORZE EQUIVALENTI).

——— asse baricentrico $\bar{x}$



$$S_x = \iint y\,dx\,dy = \iint y_0\,dx\,dy + \iint \bar{y}\,dx\,dy$$

$$= y_0 \underbrace{\iint dx\,dy}_{A} + S_{\bar{x}}$$

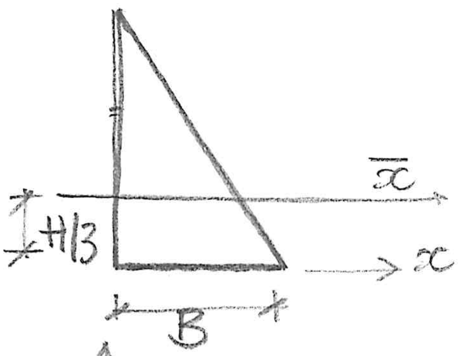
$S_{\bar{x}} \rightarrow 0$ per essere baricentrico

posizione y_0 dell'asse baricentrico è : $y_0 = S_x / A$

cioè, il sistema di aree inteso come forze/peso $dx\,dy$ posizionato su l'asse baricentrico $\bar{x}$ ha momento (statico) rispetto a x (S_x) equivalente a $A \cdot y_0$

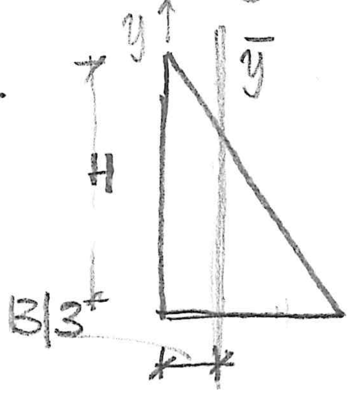
nel triangolo:

$$y_0 = \frac{BH^{\cancel{2}}/\cancel{6}\,3}{\cancel{BH}/\cancel{2}} = \frac{H}{3}$$



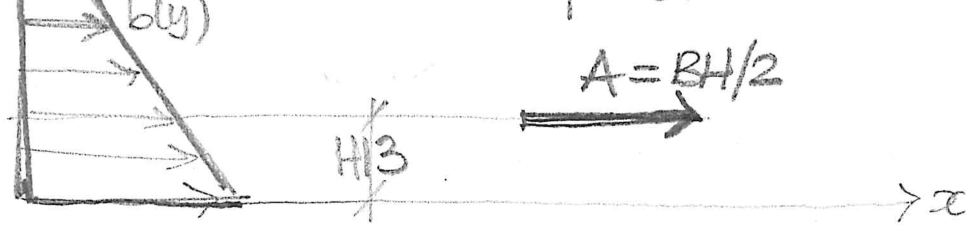
analogamente,

$$x_0 = \frac{\cancel{H}B^{\cancel{2}}/\cancel{6}\,3}{\cancel{BH}/\cancel{2}} = \frac{B}{3}$$



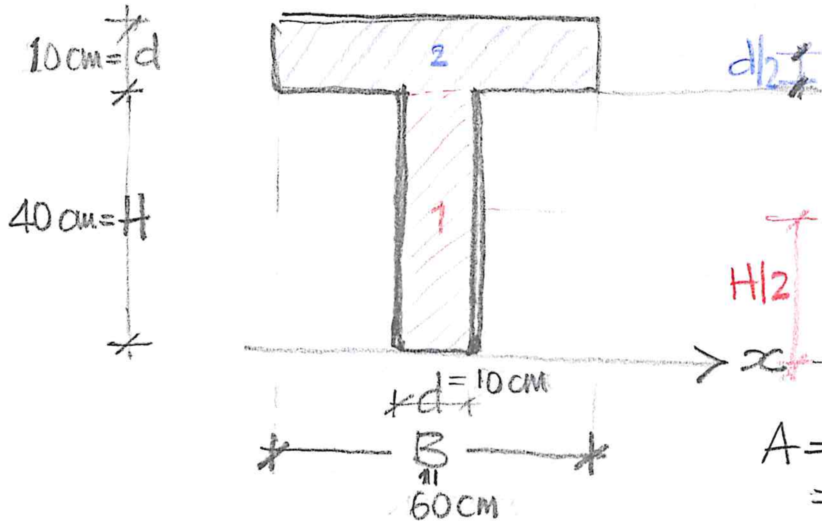
quindi il sistema di forze/peso $dx \times dy$ è rappresentato dal triangolo stesso, e

può essere ridotto al suo peso ~~totale~~ (area) posizione baricentrica



analogamente per $\bar{y}$.

esempio 2: asse baricentrico $\bar{x}$ della figura "a T"



$Bd = 600\ cm^2$

$Hd = 400\ cm^2$

$A = Bd + Hd = d(B+H)$
$= 1000\ cm^2$

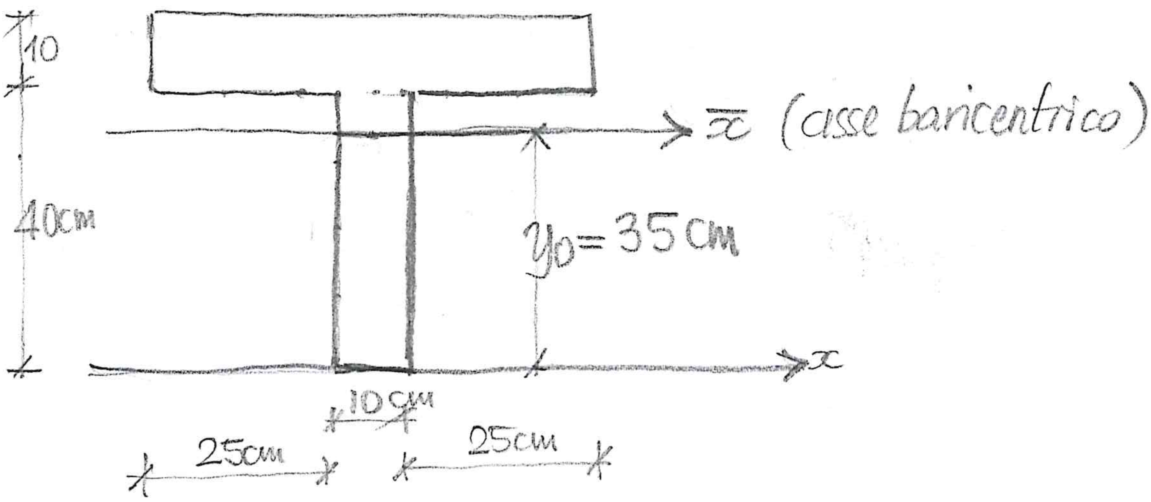
Calcolo di S_x, cioè somma di momenti di due sotto-aree rettangolari.

$$S_x = \underline{Bd\,(H + d/2)} + \underline{Hd\ H/2}$$

Posizione dell' asse baricentrico

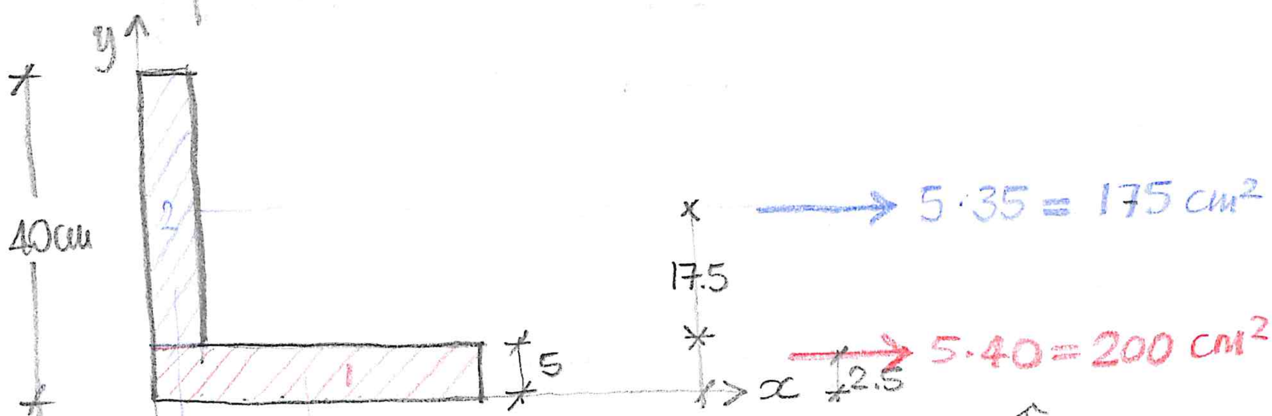
$$y_0 = \frac{S_x}{A} = \frac{Bd(H+d/2) + dH^2/2}{d(B+H)} = \frac{(H^2+Bd)/2 + BH}{B+H}$$

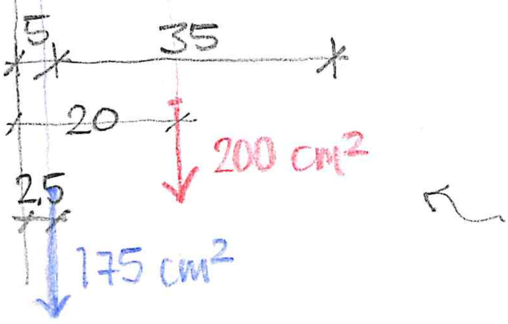
$$= \frac{35000\ cm^3}{1000\ cm^2} = 35\ cm$$



NB: un'asse di simmetria è un'asse baricentrico!

esempio 3: baricentro della sezione a "L"





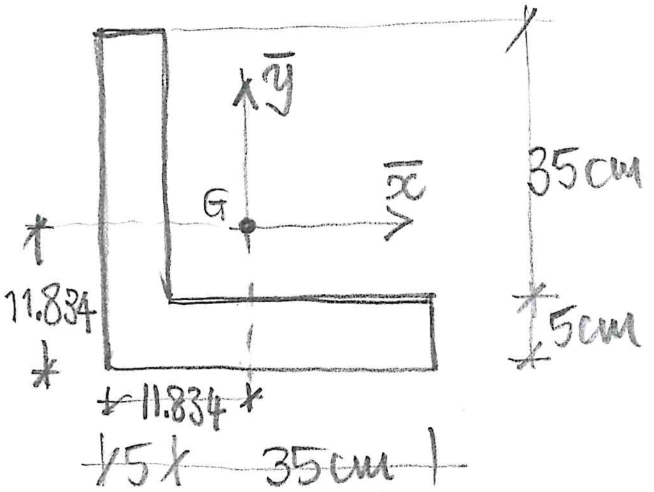
$$S_x = 200 \times 2.5 + 175 \times (17.5 + 5) = 4437.5 \text{ cm}^3$$

$$S_y = 200 \times 20 + 175 \times 2.5 = 4437.5 \text{ cm}^3$$

$$A = 175 + 200 = 375 \text{ cm}^2$$

$$y_0 = \frac{S_x}{A} = \frac{4437.5}{375} = 11.834 \text{ cm}$$

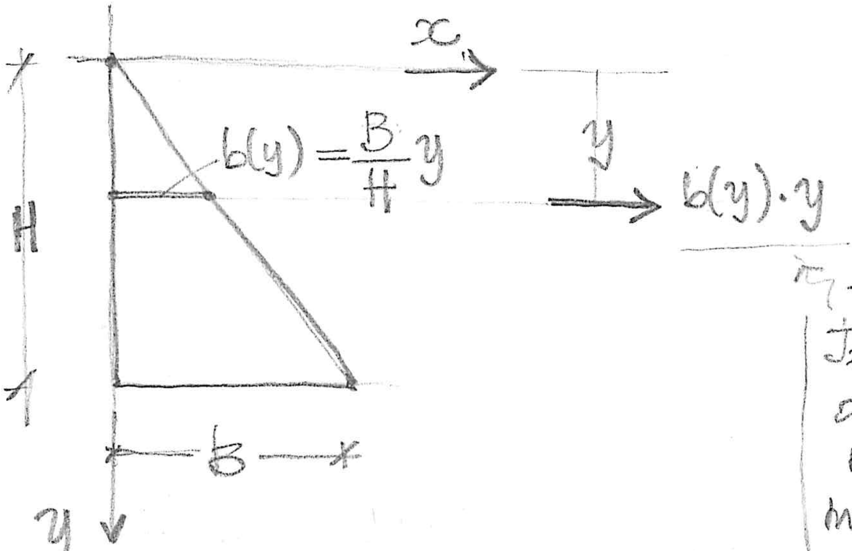
$$x_0 = \frac{S_y}{A} = 11.834 \text{ cm}$$



4_ MOMENTO di INERZIA: J

(rispetto all'asse x): $J_x = \iint y^2 \, dx \, dy$

(——— y): $J_y = \iint x^2 \, dx \, dy$



A differenza di S_x, J_x è il momento fatto da forze-peso che ruotano (atto di moto rigido) rispetto all'asse x

$$J_x = \int_0^H b(y)\, y \times y \, dy = \int_0^H \frac{B}{H} y^3 dy$$

$$= \frac{B}{\cancel{H}} \frac{H^{\cancel{4}3}}{4} = \frac{BH^3}{4}$$

per calcolare J rispetto all'asse baricentrico $\bar{x}$, parallelo all'asse x, si può "trasportare" il valore J_x già valutato senza rifare daccapo.

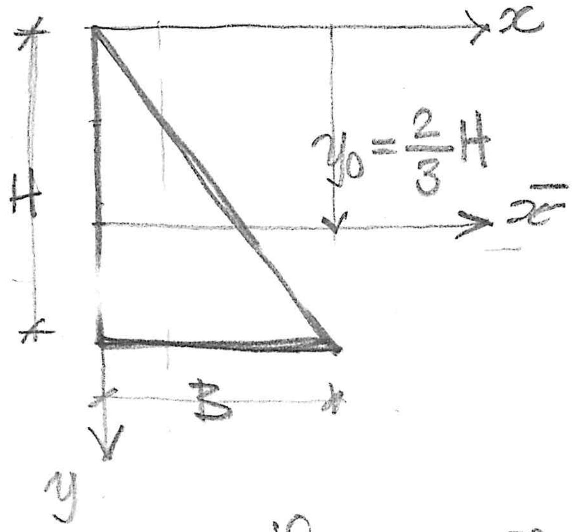
TEOREMA (del TRASPORTO) di HUYGENS-STEINER

→ Si esprime J_x in funzione di $J_{\bar{x}}$ per $\bar{x}$ baricentrico

$$J_x = \iint y^2 dx dy \underset{y = y_0 + \bar{y}}{=} y_0^2 \underbrace{\iint dx dy}_{A} + 2y_0 \underbrace{\iint \bar{y} \, dx dy}_{0} + \underbrace{\iint \bar{y}^2 dx dy}_{J_{\bar{x}}}$$

($\bar{x}$ baricentrico)

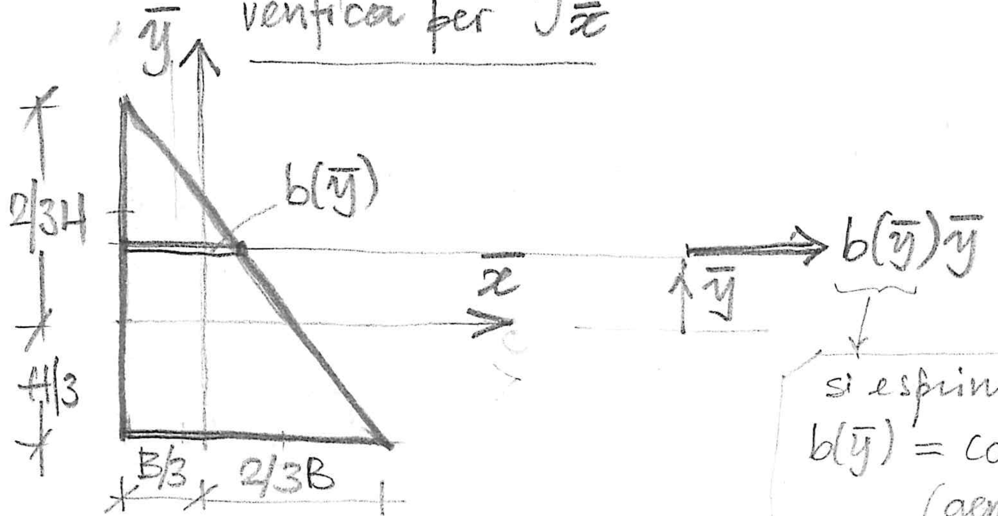
$$\Rightarrow \boxed{J_x = J_{\bar{x}} + A y_0^2}$$



$$J_x = \frac{BH^3}{4}$$

$$J_{\bar{x}} = J_x - A y_0^2 = \frac{BH^3}{4} - \frac{BH}{\cancel{2}}\,\frac{\cancel{4}^{\,2}}{9}H^2 = \frac{BH^3}{36}$$

verifica per $J_{\bar{x}}$



$b(\bar{y}) = 2/3B - B/H\,\bar{y}$

si esprime

$b(\bar{y}) = c_0 + c_1\bar{y}$

(generica funzione lineare di $\bar{y}$ a coefficienti c_0, c_1)

tale che $\begin{cases} b(2/3H) = 0 \\ b(-H/3) = B \end{cases}$ e

quindi $\begin{cases} c_0 + c_1 \frac{2}{3}H = 0 \\ c_0 - c_1 H/3 = B \end{cases}$

cioè $c_0 = 2/3B$, $c_1 = -B/H$

$$J_{\bar{x}} = \iint \bar{y}^2\,dx\,dy = \int_{-H/3}^{2/3H} b(\bar{y})\,\bar{y}\times\bar{y}\,dy$$

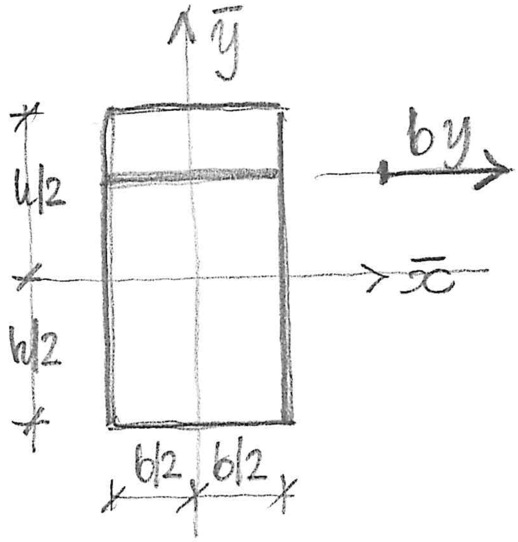
$$= \frac{2}{3}B\int_{-H/3}^{2/3H}\bar{y}^2 dy - \frac{B}{H}\int_{-H/3}^{2/3H}\bar{y}^3 dy$$

$$= \frac{2}{3}B\left[\frac{\bar{y}^3}{3}\right]_{-H/3}^{2/3H} - \frac{B}{H}\left[\frac{\bar{y}^4}{4}\right]_{-H/3}^{2/3H}$$

$$= \frac{2}{\cancel{9}}BH^3\,\frac{\cancel{8+1}}{3^3} - \frac{B}{\cancel{H}}\,\frac{H^{\cancel{4}\,3}}{4}\cdot\frac{2^4-1}{3^4} = BH^3\left(\frac{2}{27} - \frac{\cancel{15}^{\,5}}{4\cdot 27\cdot\cancel{3}}\right)$$

$$= BH^3\,\frac{\cancel{3}}{4\cdot\cancel{27}_{\,9}} = \frac{BH^3}{36} \quad \checkmark$$

esempio 4: momenti di Inerzia sezione rettangolare



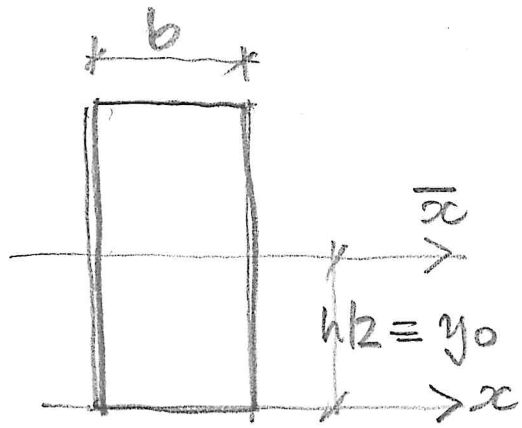
$$J_{\bar{x}} = \iint \bar{y}^2 \, dx\,dy = \int_{-h/2}^{h/2} b y \cdot y \, dy = b\left[\frac{y^3}{3}\right]_{-h/2}^{h/2}$$

$$= \frac{bh^3}{12}$$

analogamente

$$J_{\bar{y}} = \iint \bar{x}^2 \, dx\,dy = \int_{-b/2}^{b/2} h \bar{x}^2 \, dx = h\frac{b^3}{12}$$

trasporto:

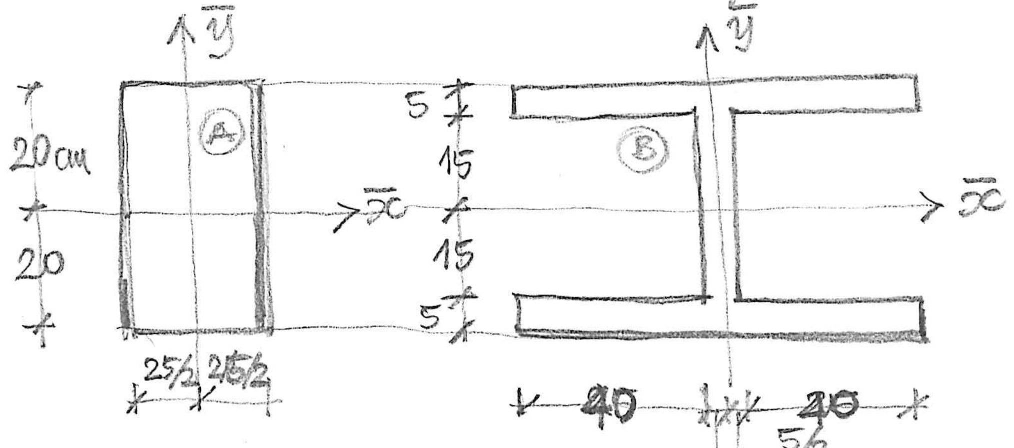


$$J_x = J_{\bar{x}} + A y_0^2$$

$$= \frac{bh^3}{12} + bh\left(\frac{h}{2}\right)^2$$

$$= \frac{bh^3}{3}$$

esempio 5: confronto $J_{\bar{x}}$ tra sezione rettangolare e sezione "I" di pari area A e pari altezza

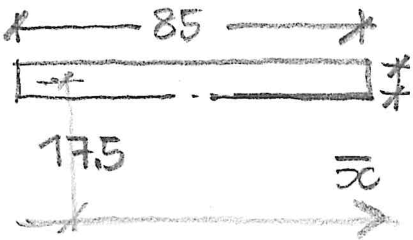


$$A = 40 \times 25 = 1000 \text{ cm}^2 = 40 \times 5 \times 4 + 5 \times 40$$

(A)

$$J_{\bar{x}} = 25\,\frac{20^3}{12} = \frac{50000}{3} \text{ cm}^4 \cong 16667 \text{ cm}^4$$

(B)



$$J_{\bar{x}} = 2 \times \left(85 \times \frac{5^3}{12} + 85 \times 5 \times 17.5^2 \right)$$

contributo ali

$$+ \frac{5 \times 30^3}{12}$$

contributo anima

$$= \frac{820000}{3} \text{ cm}^4 \simeq 273{,}334 \text{ cm}^4$$

$$J_{\bar{x}}^{(B)} \Big/ J_{\bar{x}}^{(A)} = \frac{820000}{50000} = 16.4$$