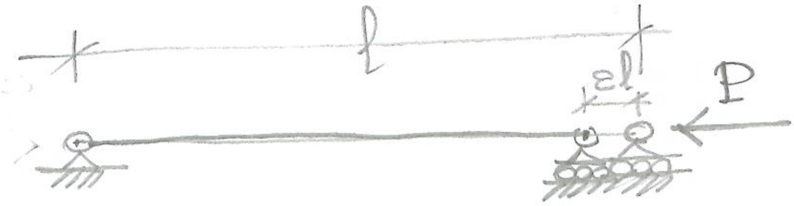
CARICO CRITICO EULERIANO

STABILITA' dell' EQUILIBRIO ELASTICO

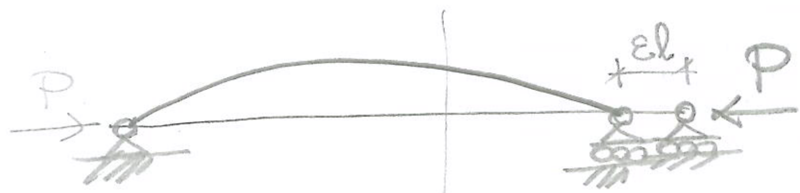
Il problema nasce dall'esistenza di più di una condizione di equilibrio per la trave, se la si considera in una configurazione non necessariamente a riposo.

Nel caso di un asta compressa e vincolata da semplici appoggi, anche l'intuito suggerisce che si trovi equilibrio se l'asta "svergola".

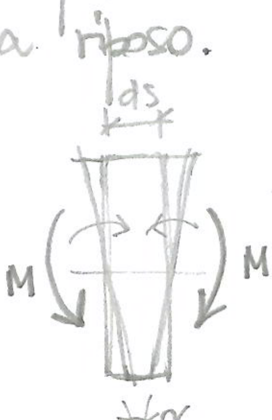
eql. classico

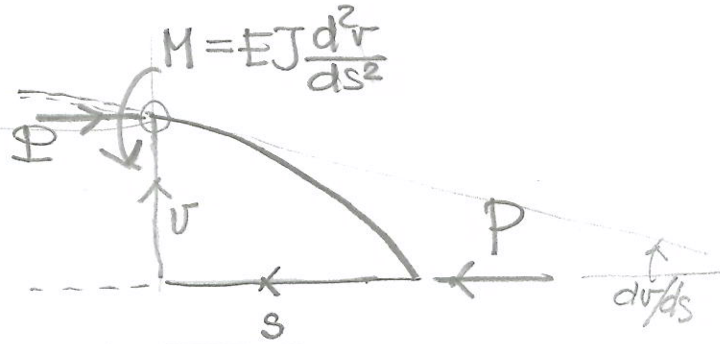


eql. euleriano



L'eql nel secondo caso si manifesta in termini di momenti che le azioni in gioco esibiscono sulla configurazione deformata (e non su quella classica a riposo.





$$\boxed{EJ\frac{d^2v}{ds^2} = Pv}$$

eql. su configuraz. deformata

Pv è un momento "instabilizzante"

$EJ\frac{d^2v}{ds^2}$ è il momento elastico che naturalmente si genera in una sezione per effetto dell'inflessione della trave assunta _ è un momento di "richiamo elastico" che "stabilizza"_

la soluzione del problema

$$\begin{cases} EJ\, d^2v/ds^2 = Pv \\ v(0) = 0 \\ v(l) = 0 \end{cases}$$

è una funzione $v(s)$ <u>sinusoidale</u>.

$$v(s) = c_1 \sin(\alpha s) + c_2 \cos(\alpha s)$$

$$\frac{dv}{ds} = c_1 \alpha \cos(\alpha s) - c_2 \alpha \sin(\alpha s)$$

$$\frac{d^2v}{ds^2} = -c_1 \alpha^2 \sin(\alpha s) - c_2 \alpha^2 \cos(\alpha s) \equiv -\alpha^2 v(s)$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha^2 = \frac{-P}{EJ} \equiv \frac{N}{EJ}$$ (P è negativo come sforzo normale!!)

Imponendo le condizioni di vincolo in $s=0$ e $s=l$ è possibile valutare per il caso particolare di asta appoggiata c_1 e c_2

$$\left.\begin{aligned} 0 &= v(0) = c_2 \\ 0 &= v(l) = c_1 \sin(\alpha l) + \cancel{c_2 \cos(\alpha l)} \end{aligned}\right\}$$

$$\Downarrow$$

si ottiene quindi una doppia soluzione $\rightarrow c_1 = 0$; $\rightarrow \sin(\alpha l) = 0$

Cioè l'equilibrio può essere indifferentemente ottenuto con

$$\begin{cases} c_1 = 0 \rightarrow v(s) = 0 & \text{(eql. classico)} \\ \sin\alpha l = 0 \rightarrow \underbrace{v(s) = c_1 \sin(\alpha s)} & \text{(eql. euleriano)} \end{cases}$$

l'asta svergola (o "sbanda") con una formula sinusoidale di ampiezza c_1 qualsiasi

Nel secondo caso è quindi ingegneristicamente rilevante porsi il problema per quale livello di N l'asta può svergolare.

$$\sin(\alpha l) = 0 \quad \text{per } \alpha l = n\pi \quad \text{con } n = 1, 2, \ldots \text{ numero intero}$$

il livello N_{cr}, SFORZO NORMALE CRITICO, per cui avviene questo fenomeno è per $n=1$, cioè

$$\alpha l = \pi \rightarrow \alpha^2 l^2 = \pi^2 \rightarrow \frac{N_{cr} l^2}{EJ} = \pi^2$$

$$\rightarrow \boxed{N_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}}$$

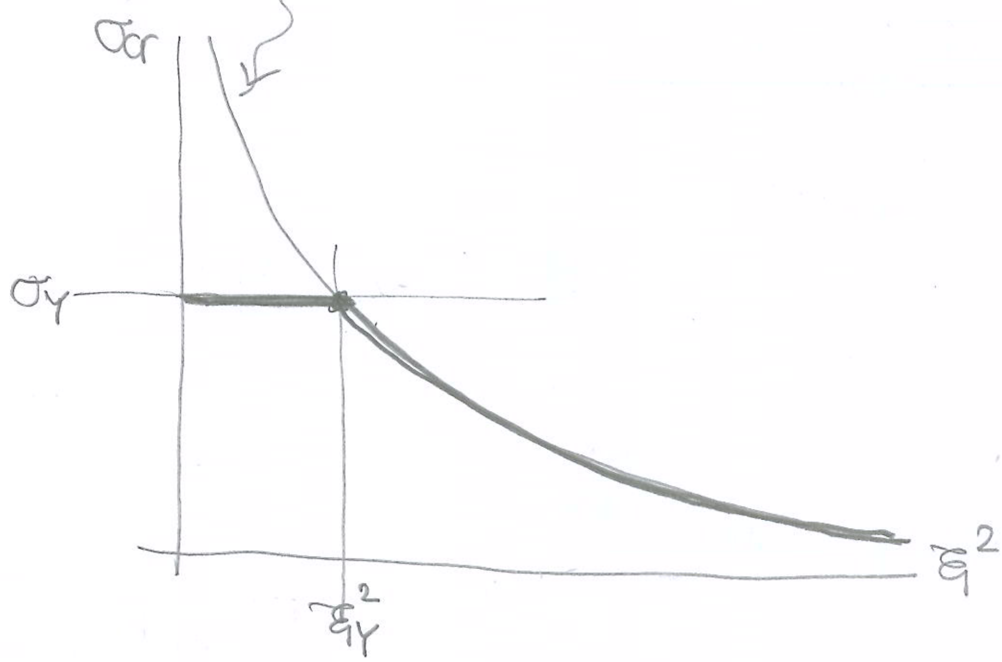
La configurazione a riposo (indeformata) perde stabilità con $N = N_{cr}$ che, a parità di materiale, è tanto più basso quanto più basso è il valore J/l^2

l^2/J è una misura dimensionale di snellezza; per averne una adimensionale basta riferirsi a una tensione di compressione critica

$$\sigma_{cr} = \frac{N_{cr}}{A} = \pi^2 E \frac{J}{A l^2} \qquad \boxed{\frac{A}{J} l^2 = \text{SNELLEZZA}^2}$$

snellezza $\xi := \sqrt{\frac{A}{J}}\, l$

$$\Rightarrow \quad \sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\xi^2}$$



Al decrescere di ξ, σ_{cr} cresce in modo esponenziale.
Essendo però in un contesto di deformata flessionale (quella sottesa al calcolo di σ_{cr}, come sbandamento della trave) la tensione non può crescere a dismisura. Al più può raggiungere σ_Y, limite di snervamento del materiale che mette in crisi, a trazione, le fibre tese della trave.

La snellezza corrispondente a questo limite ξ_Y è per l'acciaio circa $80 \div 100$.

In definitiva, la curva $\sigma_{cr} - \xi^2$ da considerare è quella riportata in grossetto in figura

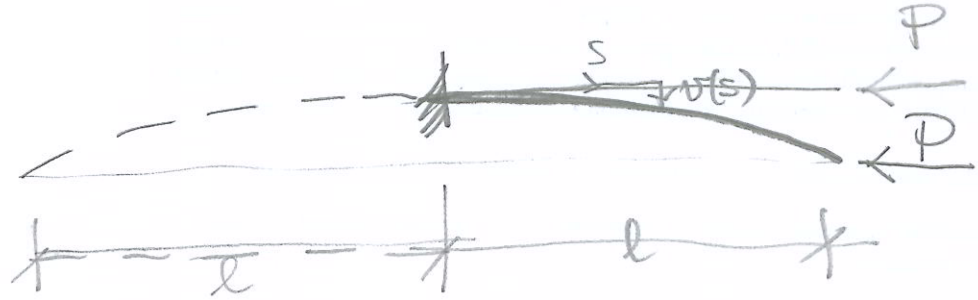
Il valore ξ cambia in funzione delle condizioni di vincolo sull'asta, che consentono curve di sbandamento differenti.

Si dimostra che le diverse condizioni di vincolo modificano la formula per il calcolo di σ_{cr} solo nel fattore l.

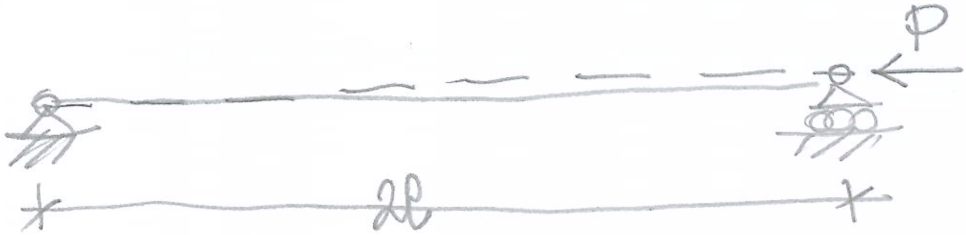
$$\underbrace{\sigma_{cr}}_{\text{asta semplicem- appoggiata}} = \pi^2 \frac{EJ}{A l^2} \longrightarrow \underbrace{\sigma_{cr}}_{\text{asta genericam- vincolata}} = \pi^2 \frac{EJ}{A l_0^2}$$

l_0 è la "LUNGHEZZA LIBERA DI INFLESSIONE"
e il rapporto l/l_0 è un coefficiente che varia appunto in funzione delle condizioni di vincolo

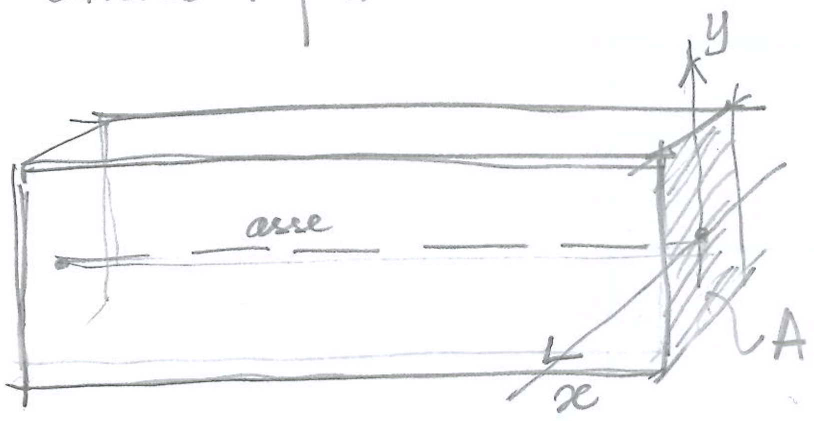
Nella mensola, per esempio, $l_0 = 2l$
come si intuisce dalla forma di inflessione della mensola.
è infatti una "mezza" trave appoggiata



$$\Rightarrow \boxed{\sigma_{cr} = \pi^2 \frac{EJ}{A(2l)^2}}$$



Il valore ε_1 cambia anche in funzione del valore del momento di inerzia J, che in generale è diverso rispetto ai due assi di una sezione



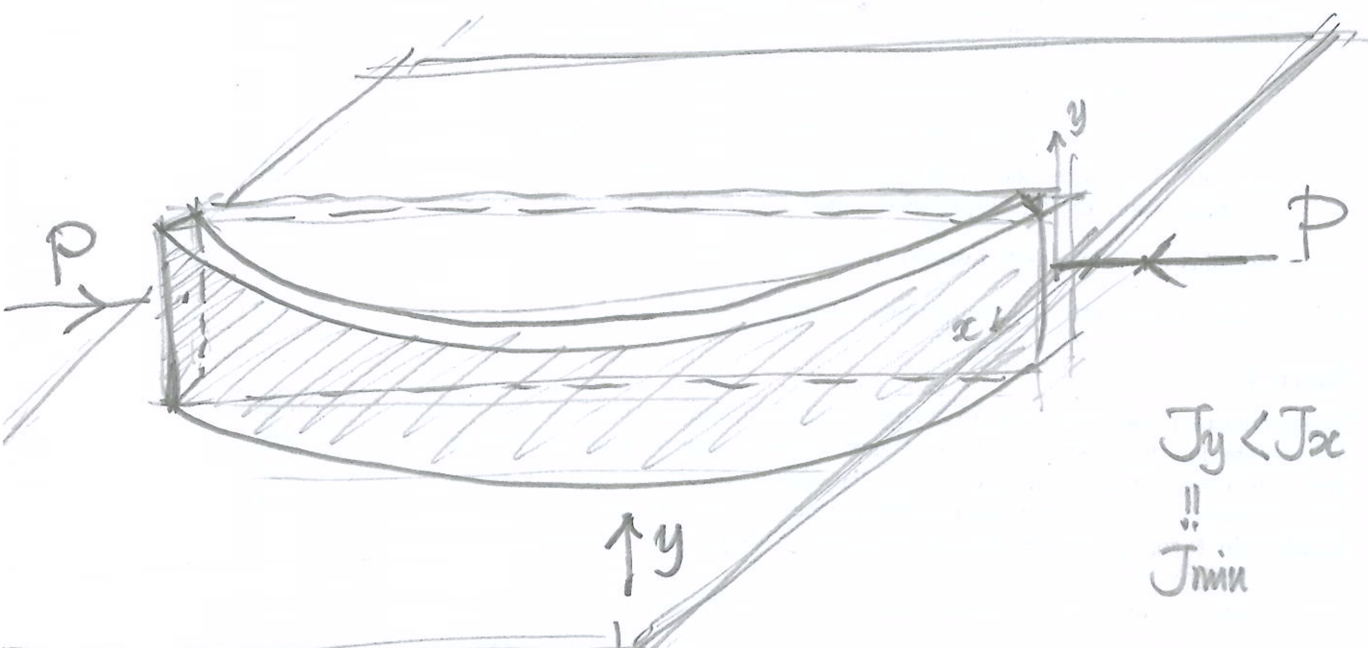
$$J_x = \int_A y^2$$

$$J_y = \int_A x^2$$

Si attinge quindi un basso σ_{cr} in base al J più piccolo (J_{min})

$$\Rightarrow \sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E J_{min}}{A l_0^2} = \frac{\pi^2 E}{\varepsilon_1^2} \quad , \quad \boxed{\varepsilon_1^2 = \frac{A l_0^2}{J_{min}}}$$

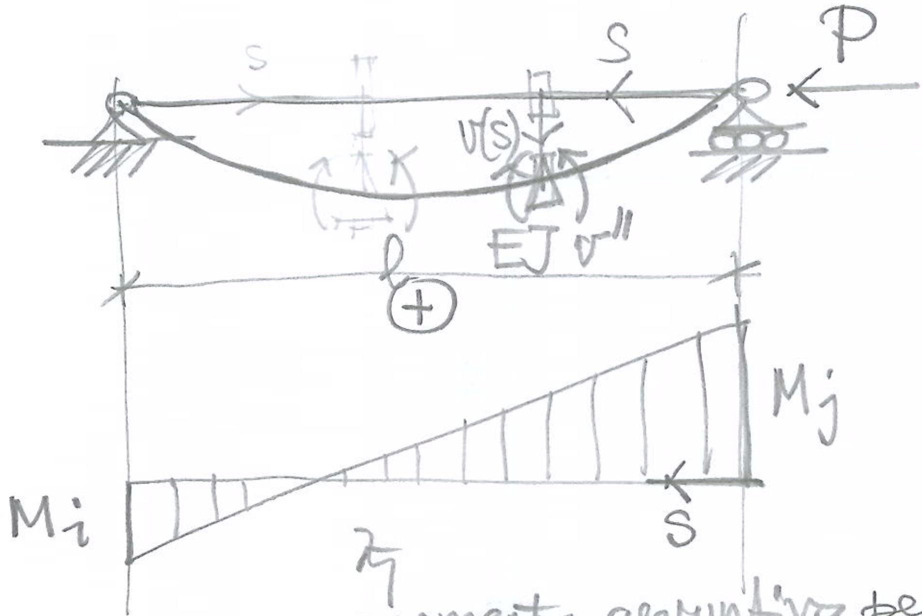
L'asta quindi tende a sbandare nel piano che ha per normale l'asse con inerzia flessionale minima (J_{min})



$J_y < J_x$
!!
J_{min}

piano con normale l'asse y a cui corrisponde J_{min}

soluzione a CARICO CRITICO EULERIANO per asta <u>genericamente vincolata</u>



momento aggiuntivo per tener conto delle diverse condizioni di vincolo agli estremi!

$$M(s) = -M_j + \frac{M_j + M_i}{l} s$$

EQL.

$$P v = EJ v'' + M(s)$$

$$= EJ v'' \underbrace{- M_j + \frac{M_j + M_i}{l} s}_{M_i s/l - M_j(1 - s/l)}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{v'' + \alpha^2 v + \beta_i \frac{s}{l} - \beta_j (1 - s/l) = 0}$$

con $\alpha^2 = -P/EJ$

$\beta_i = M_i/EJ$

$\beta_j = M_j/EJ$

soluzione generica di $v(s)$

$$v(s) = c_1 \sin(\alpha s) + c_2 \cos(\alpha s) - \frac{\beta_i}{\alpha^2}\frac{s}{\ell} + \frac{\beta_j}{\alpha^2}\left(1 - \frac{s}{\ell}\right) \quad (1)$$

Infatti,

$$v' = c_1 \alpha \cos\alpha s - c_2 \alpha \sin(\alpha s) - \frac{\beta_i}{\alpha^2 \ell} - \frac{\beta_j}{\alpha^2 \ell}$$

$$v'' = -c_1 \alpha^2 \sin\alpha s - c_2 \alpha^2 \cos\alpha s$$

$$\equiv -\alpha^2 v - \cancel{\alpha^2}\frac{\beta_i}{\cancel{\alpha^2}}\frac{s}{\ell} + \frac{\beta_j}{\cancel{\alpha^2}}\cancel{\alpha^2}\left(1 - \frac{s}{\ell}\right)$$

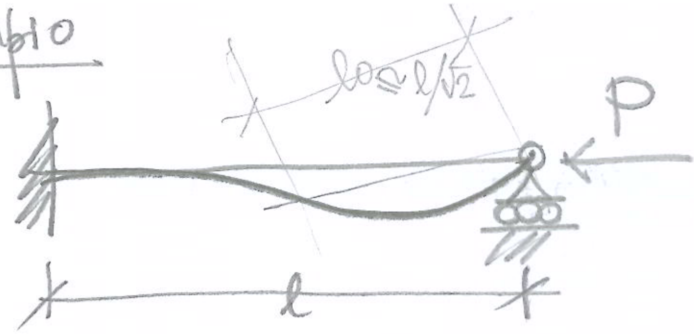
guarda la (1)

condizioni ai bordi

$$\begin{cases} 0 = v(0) \equiv c_2 + \dfrac{\beta_j}{\alpha^2} \Rightarrow c_2 = -\beta_j/\alpha^2 \\ 0 = v(\ell) = c_1 \sin(\alpha \ell) + c_2 \cos(\alpha \ell) - \dfrac{\beta_i}{\alpha^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow c_1 = \frac{\beta_i}{\alpha^2}\frac{1}{\sin(\alpha\ell)} + \frac{\beta_j}{\alpha^2}\frac{1}{\tan(\alpha\ell)}$$

esempio



$$\begin{cases} M_j = 0 \rightarrow \beta_j = 0 \\ M_i \neq 0 \rightarrow \beta_i \neq 0 \end{cases}$$

ma nel nodo i si ha anche $v'(l) = 0$

$$\beta_j = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$\Rightarrow c_1 = \frac{\beta_i}{\alpha^2} \frac{1}{\sin(\alpha l)} \quad (*)$$

$$0 = v'(l) = c_1 \alpha \cos(\alpha l) - \cancel{c_2 \alpha \sin(\alpha l)} - \frac{\beta_i}{\alpha^2 l} - \cancel{\frac{\beta_j}{\alpha^2 l}}$$

$$0 = c_1 \alpha \cos(\alpha l) - \frac{\beta_i}{\alpha^2 l} \quad (**)$$

quindi deve contemporaneam. essere $(*)$ e $(**)$

$$c_1 \alpha \cos(\alpha l) - c_1 \frac{\sin(\alpha l)}{l} = 0$$

ossia

$$c_1 \left(\alpha l \cos(\alpha l) - \sin(\alpha l) \right) = 0$$

duplice soluzione

- $c_1 = 0$ (eql. classico)

- $\tan(\alpha l) = \alpha l \Rightarrow$ valida per $\alpha l \cong \sqrt{2}\,\pi$

$$\Rightarrow \sigma_{cr} = \frac{(-P)}{A} = \frac{\alpha^2 EJ}{A} \cong \frac{\pi^2 EJ}{A \underbrace{(l/\sqrt{2})}_{l_0}{}^2}$$