MODELLO ELASTICO-LINEARE della TRAVE (IN 2D)

Nell'ipotesi di sezioni rigide e piccoli spostamenti il comportamento della trave viene descritto tramite 3+3+3 grandezze incognite:

sollecitazioni $\{N, T, M\}$, deformazioni $\{\varepsilon, \gamma, \chi\}$

spostamenti $\{u, v, \theta\}$

noti i carichi distribuiti lungo l'asse s $\{p, q, \mu\}$

e le condizioni agli estremi $s=0$, $s=\ell$

(grandezze fisiche come funzioni di un dominio in cui sono definite)

I campi incogniti soddisfano 3 gruppi di equazioni

EQUILIBRIO, EQL	COMPATIBILITÀ (CINEMATICA), CMP	LEGAMI COSTITUTIVI, CST
$\dfrac{dN}{ds} + p = 0$	$\varepsilon = \dfrac{du}{ds}$	$N = EA\varepsilon$
$\dfrac{dT}{ds} + q = 0$	$\gamma = \dfrac{dv}{ds} - \theta$	$T = GA^{*}\gamma$
$\dfrac{dM}{ds} + T + \mu = 0$	$\chi = \dfrac{d\theta}{ds}$	$M = EJ\chi$

a parte le condizioni agli estremi, $s=0$, $s=\ell$, poste in termini di forze concentrate $\{N(0), N(\ell),\ T(0), T(\ell),\ M(0), M(\ell)\}$

e/o di spostamenti $\{u(0), u(\ell),\ v(0), v(\ell),\ \theta(0), \theta(\ell)\}$

EQL, e CMP sono inquadrabili nel PRINCIPIO DI BILANCIO, che determina una condizione di dualità tra descrizione

CINEMATICA $\{\varepsilon, \gamma, \chi\} \leftrightarrow \{u, v, \theta\}$

e DINAMICA $\{N, T, M\} \leftrightarrow \{p, q, \mu\}$

PRINCIPIO DI BILANCIO

$$\boxed{P_{est} - P_{int} = 0}$$

$$P_{est} = \int_0^l (p\dot{u} + q\dot{v} + \mu\dot{\theta}) + \left[N\dot{u} + T\dot{v} + M\dot{\theta}\right]_0^l$$

$$P_{int} = \int_0^l N\dot{\varepsilon} + T\dot{\gamma} + M\dot{\chi}$$

$\forall \{\dot{\varepsilon}, \dot{\gamma}, \dot{\chi}\}$ COMPATIBILE

e/o $\forall \{N, T, M\}$ EQUILIBRATO.

I legami costitutivi sono invece inquadrabili nel PRINCIPIO di DISSIPAZIONE.

Infatti, l'energia di DEFORMAZIONE

$$\phi = \frac{1}{2}\int_0^l \left(EA\varepsilon^2 + GA^*\gamma^2 + EJ\chi^2\right)$$

può essere vista come l'energia LIBERA (*) del sistema "fisico" trave.

(*) l'energia LIBERA è, in un dato sistema fisico, è la quantità di lavoro che il sistema può rilasciare all'ambiente esterno, indipendentemente dalle condizione con cui tale ambiente eventualmente condiziona il sistema stesso

PRINCIPIO DI DISSIPAZIONE

$$\boxed{P_{int} - \dot{\phi} \geq 0}$$

$$\dot{\phi} = \frac{d\phi}{dt} = \int_0^l \{(EA\varepsilon)\dot{\varepsilon} + (GA^*\gamma)\dot{\gamma} + (EJ\chi)\dot{\chi}\}$$

non è mai negativa la differenza tra l'energia prodotta, nell'unità di tempo, nell'interno di un sistema per bilanciare l'energia introdotta dall'ambiente esterno, e l'energia rilasciata, nella stessa unità di tempo, dal sistema stesso.

⇒ In assenza di dissipazione il principio "regge" quindi i legami costitutivi.

$$0 = P_{int} - \dot{\phi} \equiv \int_0^l \{(N - EA\varepsilon)\dot{\varepsilon} + (T - GA^*\gamma)\dot{\gamma} + (M - EJ\chi)\dot{\chi}\}$$

da cui appunto le equazioni CST.

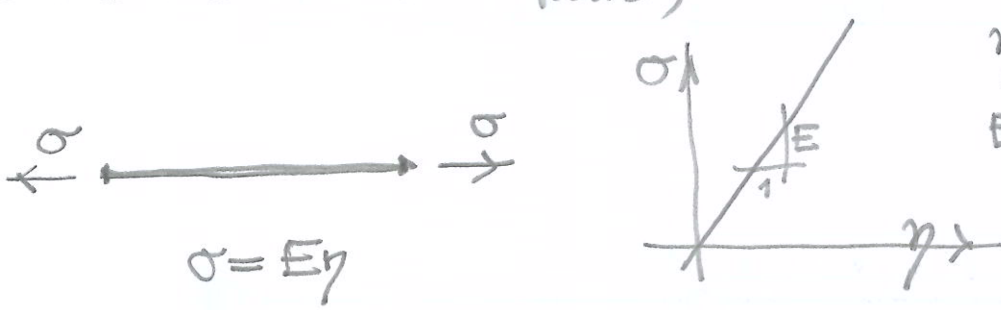
<u>NB</u>: Il principio di dissipazione è noto anche come disuguaglianza di Clausius-Duhem. La differenza $P_{int} - \dot{\phi}$ è una potenza dissipata e nei fatti misura l'"indisponibilità" di un sistema (la trave) a produrre lavoro, cioè l'entropia. In questa accezione il principio può essere quindi riquadrato come 2° principio della termodinamica.

L'irreversibilità dell'evento fisico "equilibrio della trave" si manifesta quando il sistema "trave" perde l'elasticità tra la risposta sollecitativa e quella deformativa.

(GENESI DEL) LEGAME ELASTICO LINEARE

Esperienze di HOOKE (~1660), EULER (~1730),
RICCATI (1782), YOUNG (1807)

prova a trazione (su fibra longitudinale all'asse della trave)



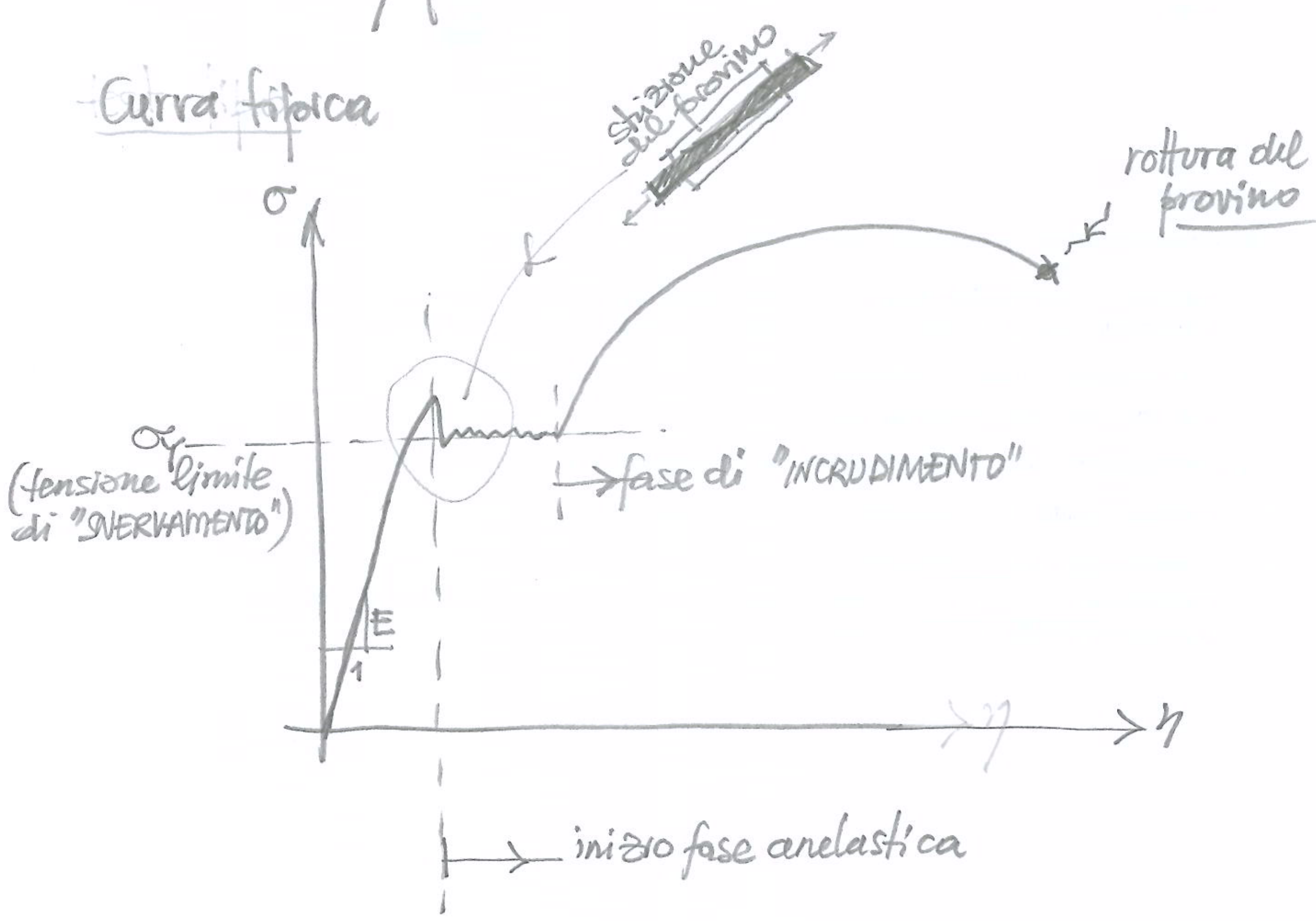
η % deformazione assiale

E, modulo di Young

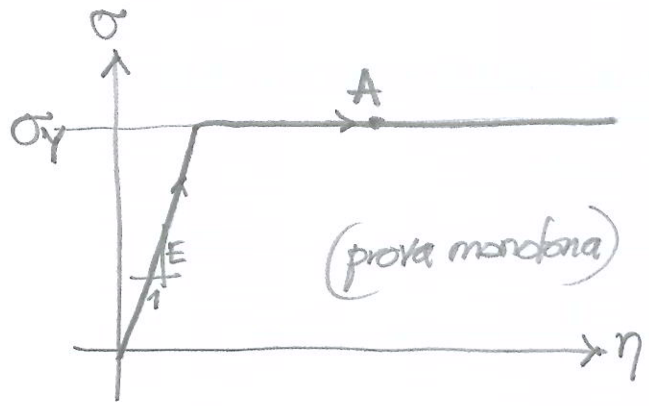
$\sigma = E\eta$

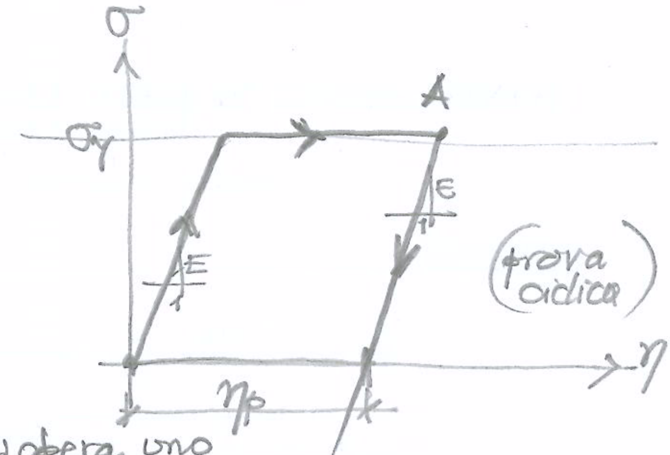
In realtà, la risposta tensionale σ del provino trova valori di equilibrio anche in una fase post-elastica, "fase anelastica" o "plastica" in cui le η prodotte sono irreversibili

Curva tipica



schematizzazione "COMPORTAMENTO ELASTICO-PERFETTAMENTE PLASTICO" (5)



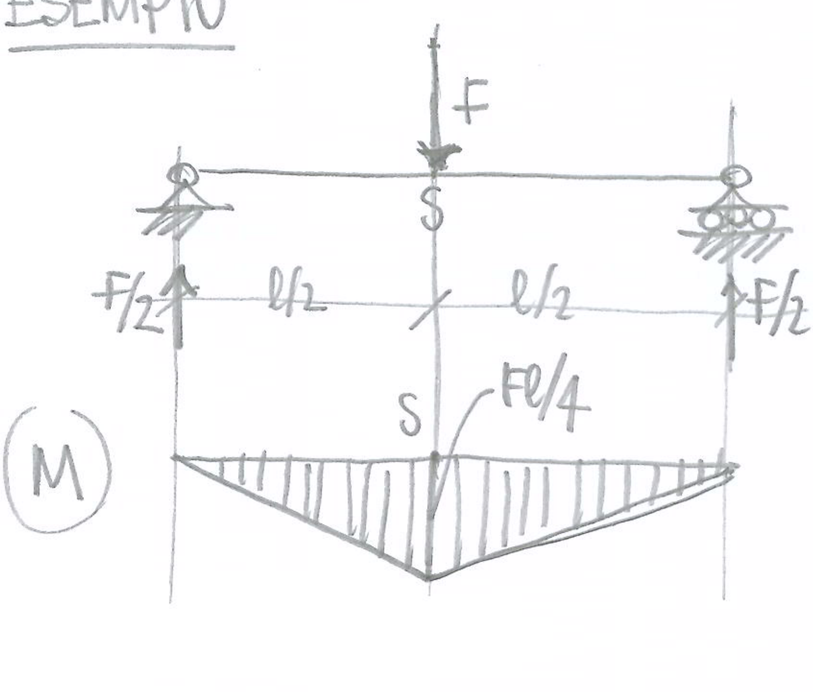


se si opera uno "SCARICO" in un punto A della fase anelastica c'è un residuo di deformazione plastica irreversibile η_p

Per la TRAVE si può ipotizzare di monitorare in fase più che elastica le fibre assiali soggette a tensione derivata dalla sola componente sollecitativa di Momento Flettente

Si ipotizza inoltre che il comportamento a trazione e compressione sia perfettamente speculare.

ESEMPIO

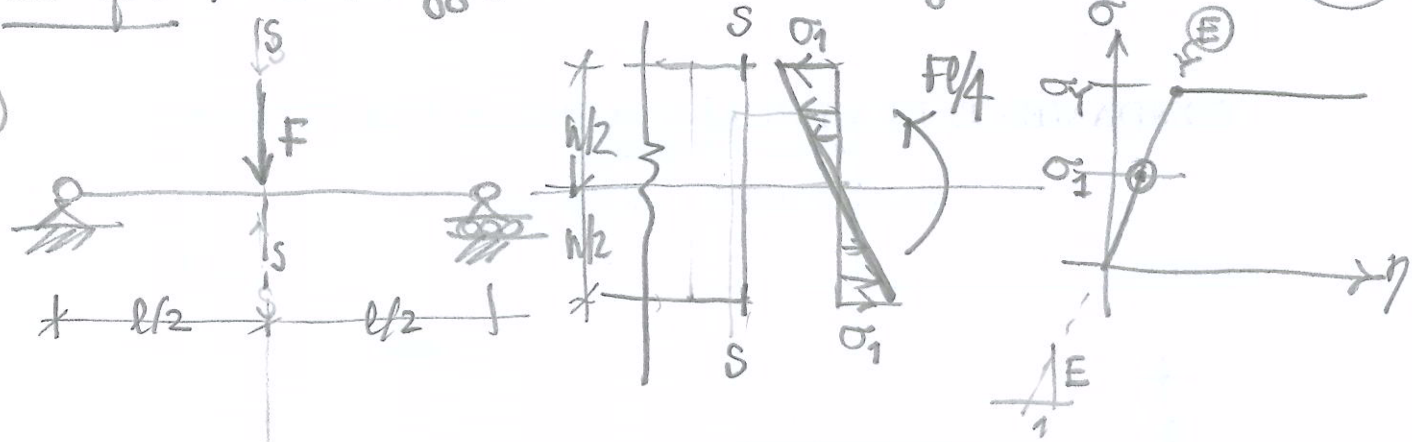


monitoraggio sezione S (rettangolare)

soggetta a un momento pari a Fl/4

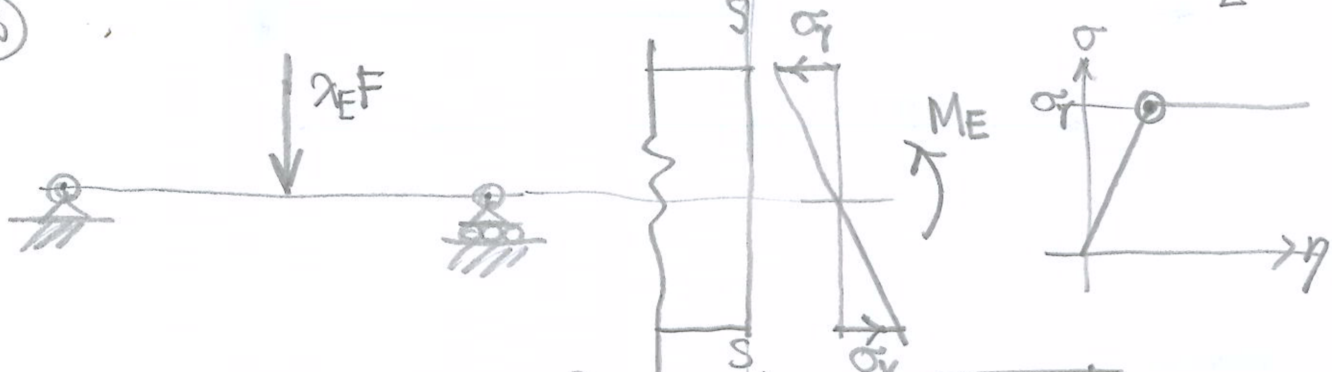
esempio: monitoraggio sezione S rettangolare

①



se $\sigma_Y / \sigma_1 =: \lambda_E$ il carico può essere amplificato fino al valore $\lambda_E F$ e la trave resterà in fase elastica ~ condizione di "LIMITE ELASTICO" "E"

②

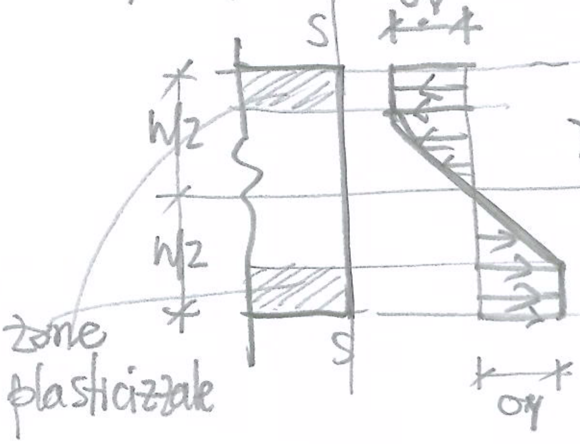


$$M_E \underset{\substack{\text{sovrapponibilità}\\ \text{degli effetti}\\ \text{(comportam. elastico lineare)}}}{=} \frac{\lambda_E F l}{4} \equiv \sigma_Y \frac{bh^2}{6} \Rightarrow \boxed{\lambda_E = 4M_E/Fl}$$

equivalenza fra tensioni e M in sezione rettangolare

$$\sigma_Y \frac{bh^2}{6} = M_E$$

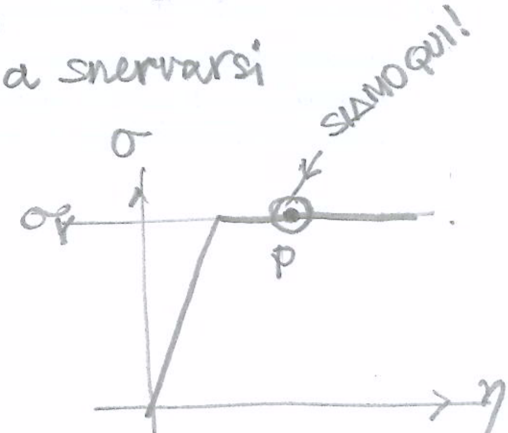
③ fase plastica: altre fibre iniziano a snervarsi



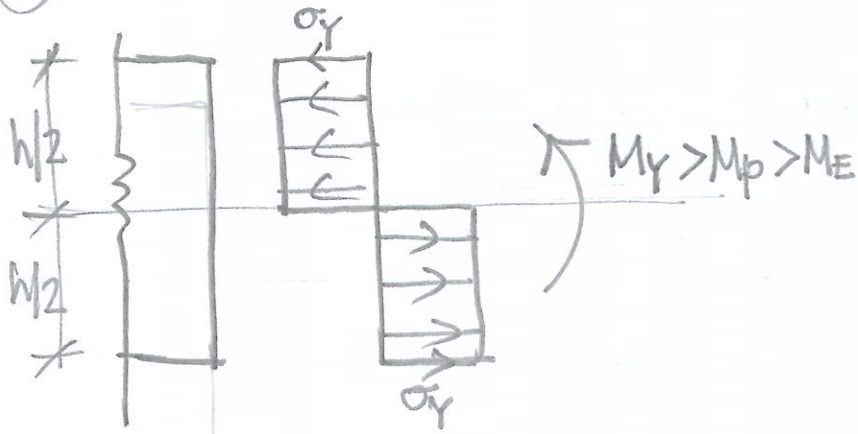
$M_p > M_E$

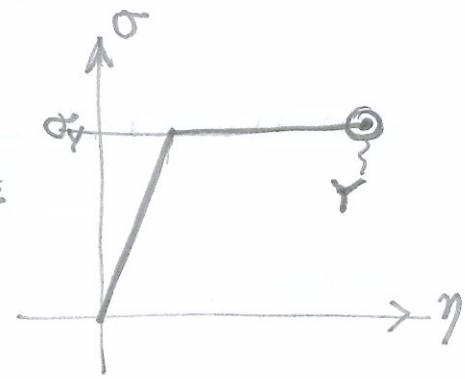
$\lambda_p > \lambda_E$

è possibile amplificare il carico ulteriormente



4) rottura della trave: tutte le fibre si sono snervate



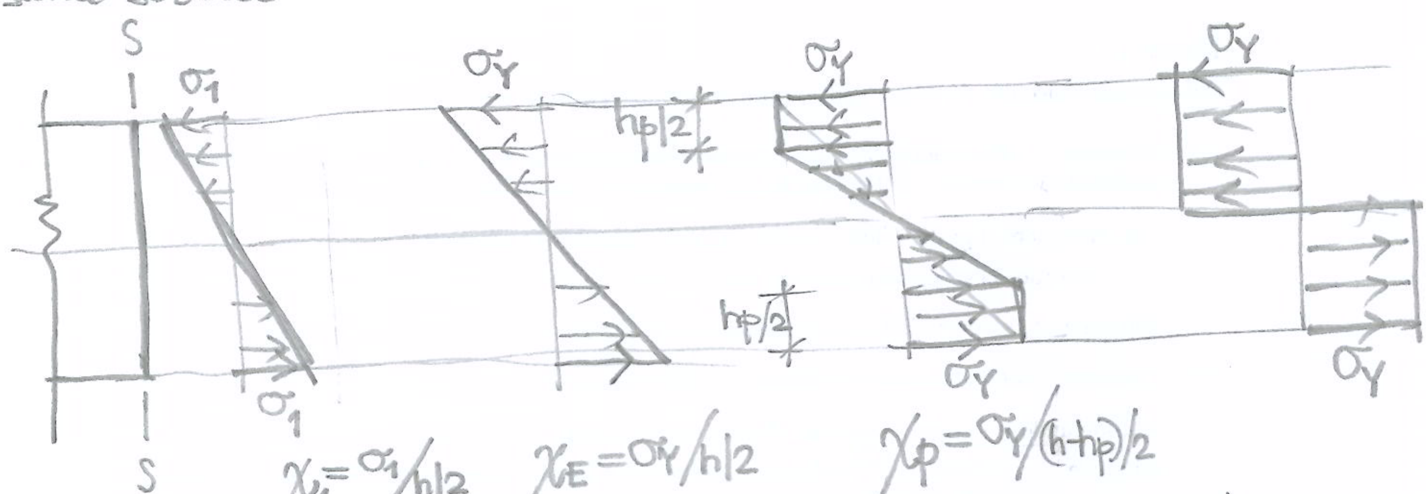


si è al <u>collasso</u>(Y), cioè all'ultima condizione di EQUILIBRIO ammessa

se c'è ancora equil. si può calcolare per equivalenza di sistemi di forze il legame fra tensioni a collasso e M_Y

$$M_Y = \sigma_Y \frac{bh^2}{4}$$

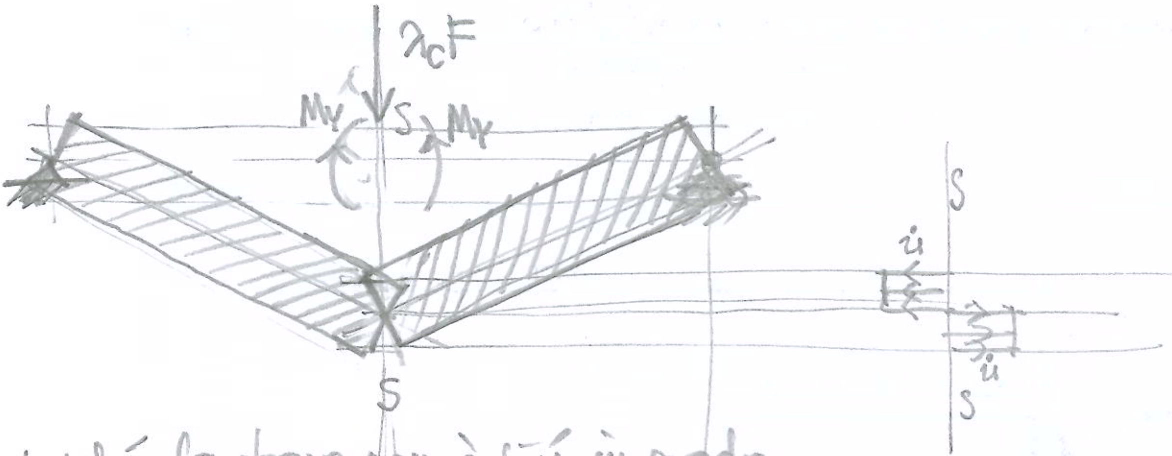
sulla deformazione della trave: $\chi = M/EJ$ è in generale anche ottenibile come pendenza del diagramma delle tensioni sulla sezione



$\underbrace{\chi_1 = \sigma_1 / h/2}_{\text{fase 1}}$ $\quad$ $\underbrace{\chi_E = \sigma_Y / h/2}_{\text{limite elastico}}$ $\quad$ $\underbrace{\chi_p = \sigma_Y / (h-h_p)/2}_{\text{fase plastica}}$ $\quad$ COLLASSO

$\chi_E > \chi_1$ $\quad$ $\chi_p > \chi_E > \chi_1$ $\quad$ $\boxed{\chi_Y \to \infty}$

Il collasso si manifesta sulla trave come un atto di moto rigido di disconnessione (a momento) nella sezione S



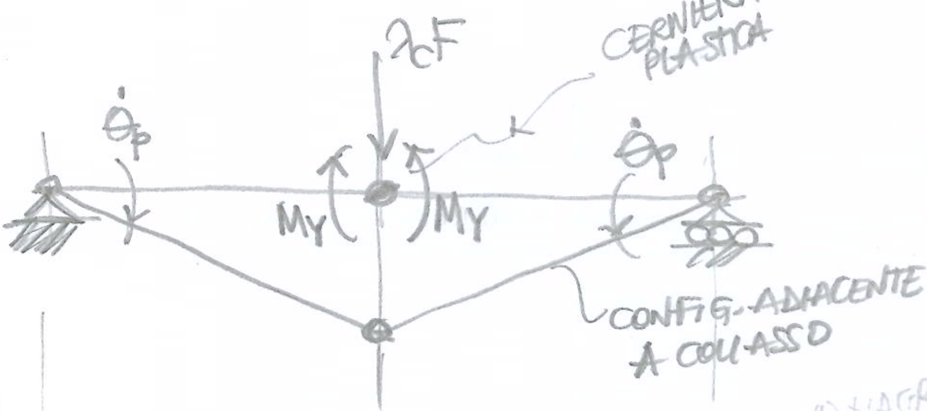
poiché la trave non è più in grado di "sopportare" momento in S è come se, al collasso, in S si manifestasse una cerniera, "CERNIERA PLASTICA"

$\lambda_c F$ può quindi essere determinato come misura di potenza in un corpo rigido (per un atto di moto rigido plastico)

$$\underbrace{\lambda_c F \cancel{\dot\theta_p} \frac{l}{2}}_{P_{est}} = \underbrace{2 M_Y \cancel{\dot\theta_p}}_{\text{pseudo } P_{int}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\lambda_c = \frac{4M_Y}{Fl}}$$



NB

è una sorta di EQUILIBRIO ideale (l'ultimo ammesso sulla struttura), in cui la Pint si trasforma in una potenza plastica dissipata tra M_Y e la corrispondente "curvatura" $\chi_Y \to \infty$.
Tale pseudo-potenza interna è per costruzione sempre ≥ 0

Si è in definitiva passati dal limite elastico $\lambda_E = \frac{4M_E}{Fl}$ al limite (plastico) a collasso $\lambda_c = \frac{4M_Y}{Fl}$ (o limite "ultimo")

$\rightarrow \lambda_c > \lambda_E$ poiché $M_Y > M_E$!

precisazione sull'eql ideale a collasso

valgono ancora i principi

$$\begin{cases} \lambda_c P_{est} - P_{int} = 0 \\ P_{int} - \dot{\phi} \geq 0 \end{cases}$$

ma si pongono su una cinematica di rottura in cui

$\dot{\phi} = 0$ (è un atto di moto rigido)

$$P_{int} = \underbrace{\sum M_Y \dot{\theta}_p}_{} \geq 0$$

sono termini positivi perché generati con $\dot{\theta}_p$ che ruotano come M_Y

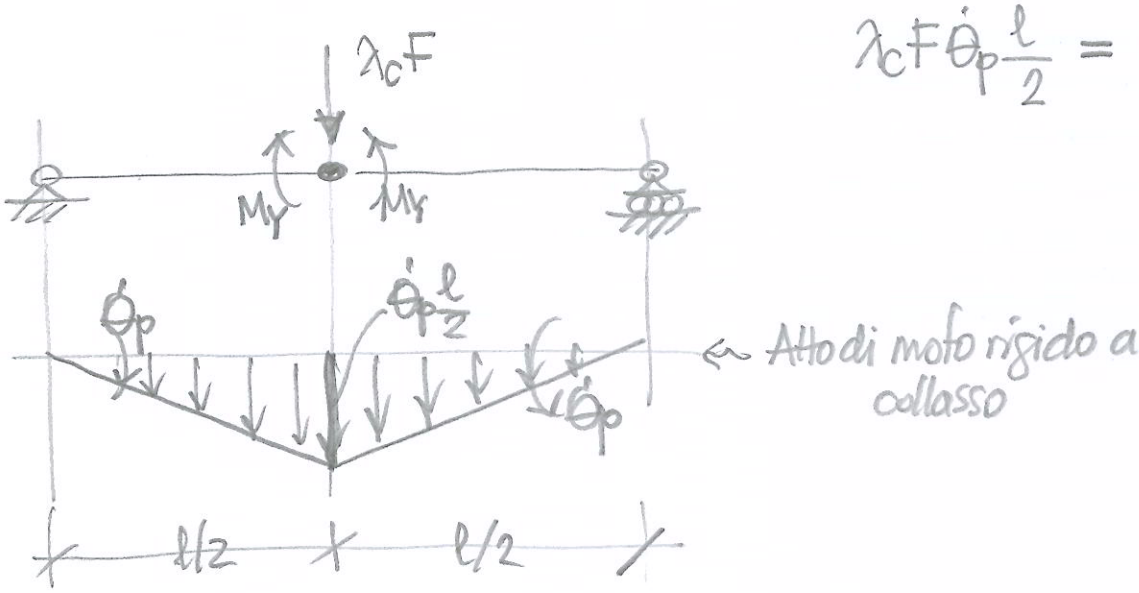
Quindi,

$$\lambda_c \underbrace{P_{est}}_{} = \sum M_Y \dot{\theta}_p$$

misurata sull'atto di moto rigido a rottura (che dà $\dot{\theta}_p$)

Nell'esempio

$$\lambda_c \overbrace{F \dot{\theta}_p \frac{l}{2}}^{P_{est}} = 2 M_Y \dot{\theta}_p$$



DEFINIZIONE GENERALE di COLLASSO STRUTTURALE

"ultima" condizione di equilibrio ammissibile per la struttura che si manifesta come un MECCANISMO che è un Atto di Moto RIGIDO (AMR) compatibile con i vincoli strutturali presenti.

Per "ultima" si intende una condizione di equilibrio a partire dalla quale ad ulteriore incremento di carico non è possibile associare uno stato di equilibrio sulla struttura.

I principi di bilancio assumono quindi la seguente forma

$$\left.\begin{aligned} \lambda_c P^c_{est} - P^c_{int} &= 0 \\ P^c_{int} - \dot{\phi}_c &= \dot{D}_c \geq 0 \end{aligned}\right\} \text{ ovvero } \lambda_c P^c_{est} - \dot{\phi}_c = \dot{D}_c$$

$\dot{D}_c$ "potenza di sapata" a collasso

Poiché si tratta di un MECCANISMO (AMR), $\dot{\phi}_c = 0$ e di conseguenza

$$\lambda_c P^c_{est} = \dot{D}_c \geq 0 \qquad (1)$$

(A). La (1) dimostra che la potenza spesa dai carichi P^c_{est} non è mai NEGATIVA.

(B) $\dot{D}_c$, per quanto espresso nella pagina precedente assume la forma

NB: CI SI LIMITA AL SOLO CASO DI CONTRIBUTI FLESSIONALI

$$\dot{D}_c = \sum_{cp}{}' M_Y \dot{\theta}_c \qquad (2)$$

cp: cerniere plastiche che si formano per raggiungimento di M_Y

(C) Un moltiplicatore di carico è detto
STATICAMENTE AMMISSIBILE (λ_s)
se al carico risultante corrisponde una
distribuzione M_s di momenti flettenti (ammissibile)
tale che $M_s \leq M_Y$ in ogni sezione.

(D) Un moltiplicatore di carico è detto
CINEMATICAMENTE AMMISSIBILE (λ_φ)
se al carico risultante corrisponde una
condizione di equilibrio valutata su un AMR
che simula un MECCANISMO di COLLASSO,
generato per formazione di cerniere plastiche
(in cui si attinge M_Y)

(C) configura un APPROCCIO "STATICO"
al calcolo del carico di collasso.
(moltiplicatore λ_c)

(D) configura un APPROCCIO "CINEMATICO"

ANALISI LIMITE: APPROCCIO STATICO
+ ——— CINEMATICO

TEOREMA STATICO un moltiplicatore STATICAMENTE AMMISSIBILE non è MAI SUPERIORE a quello di collasso

$$\boxed{\lambda_s \leq \lambda_c}$$

dimostrazione

M_s è la distribuzione di momenti in EQUILIBRIO con λ_s
Il rispetto dell'EQUILIBRIO può essere espresso sull'AMR che definisce il meccanismo di collasso in termini di bilancio di potenza

$$\lambda_s P_{est}^c = \sum_{cp} M_s \dot{\theta}_c \qquad (3)$$

Poiché l'equilibrio a collasso si scrive come la (1) con la definizione (2)

$$\lambda_c P_{est}^c = \sum_{cp} M_Y \dot{\theta}_c \qquad (4)$$

si può valutare la differenza $\lambda_s - \lambda_c$ usando le condizioni di equilibrio (3) e (4), cioè sottraendo membro a membro (3) e (4)

$$\lambda_s - \lambda_c = \frac{\sum_{cp} (M_s - M_Y)\dot{\theta}_c}{P_{est}^c} \qquad (5)$$

Siccome $P_{est}^c \geq 0$ (conclusione (A), pag. 9) e vale l'ammissibilità ($M_s \leq M_Y$) la (5) dimostra il teorema

$$\lambda_s - \lambda_c \leq 0$$

$\boxed{\text{TEOREMA CINEMATICO}}$ un moltiplicatore CINEMATICAM. AMMISSIBILE non è MAI INFERIORE a quello di collasso

$$\boxed{\lambda_c \leq \lambda_p}$$

dimostrazione

Poichè il momento M_c è in equilibrio con λ_c, questa condizione di equilibrio a collasso può essere scritta come bilancio di potenza generico AMR ipotizzato con approccio cinematico

$$\lambda_c \dot{P}_{est} = \sum_{cp} M_c \dot{\theta}_p \qquad (6)$$

λ_p è per definizione il risultato dell'equazione

$$\lambda_p \dot{P}_{est} = \sum_{cp} M_Y \dot{\theta}_p \qquad (7)$$

Sottraendo, come prima, membro a membro (6), (7) si dimostra il teorema

$$\lambda_c - \lambda_p = \frac{\sum_{cp} (M_c - M_Y)\dot{\theta}_p}{\dot{P}_{est}} \leq 0$$

in quanto, per costruzione $\dot{P}_{est} \geq 0$ e per ammissibilità $M_c \leq M_Y$

OSSERVAZIONI

1. il moltiplicatore al limite elastico λ_E è uno dei possibili λ_s staticamente ammissibili perché è equilibrato ed è tale che $M \leq M_Y$ (e in più è compatibile)
$$\Rightarrow \lambda_E \leq \lambda_C$$

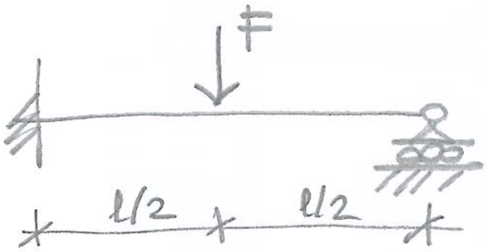
   questo risultato giustifica l'analisi elastica come progetto/verifica con $\sigma \leq \sigma_Y$

2. Su una struttura isostatica, può succedere che
$$\lambda_s \equiv \lambda_p \equiv \lambda_C$$
perché non si hanno "risorse" (in termini di sollecitazioni) alternative a quella equilibrata (di corpo rigido) $\rightarrow \lambda_s = \lambda_C$
e per lo stesso motivo basta un atto di moto rigido di disconnessione per attivare un collasso cinematicamente ammissibile $\rightarrow \lambda_p = \lambda_C$

3. Se in generale con (teorema) approccio statico e con (teorema) approccio cinematico si ha $\lambda_s \equiv \lambda_p$ allora si ha una valutazione certa di λ_C
$$\Rightarrow \lambda_C \equiv \lambda_s \equiv \lambda_p$$

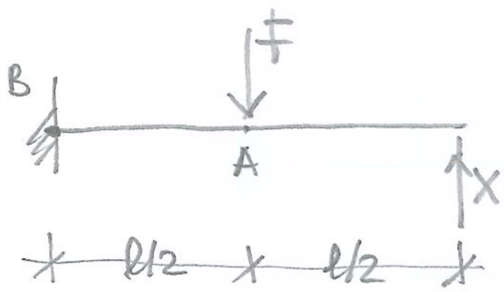
4. In generale i due teoremi insieme forniscono un intervallo di stima del collasso
$$\boxed{\lambda_s \leq \lambda_C \leq \lambda_p}$$

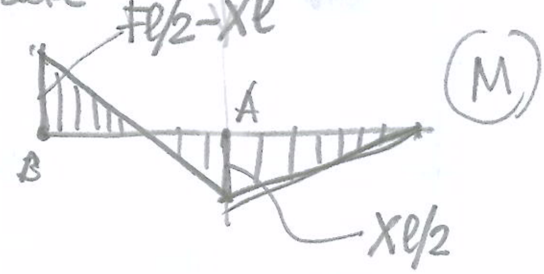
Esempio



Approccio statico

generico stato di sollecitazioni equilibrate





un generico M equilibrato ma anche plastcam.- ammissibile richiede che

$$\left.\begin{array}{lll} \text{in } A & Xl/2 \leq M_Y \\ \text{in } B & Fl/2 - Xl \leq M_Y \end{array}\right\} (1)$$

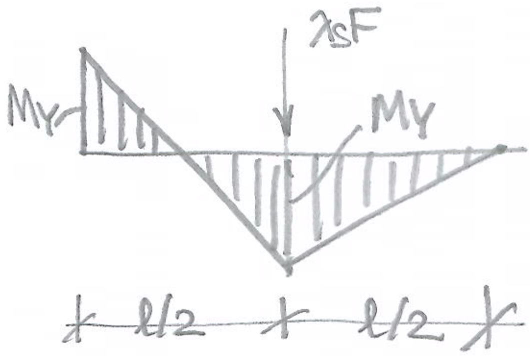
poichè possiamo moltiplicare F per un λ_s e tale λ_s è al massimo λ_c, massimizziamo la condizione (1) come

$$\left.\begin{array}{lll} \text{in } A & X\frac{l}{2} = M_Y \\ \text{in } B & \lambda_s \frac{Fl}{2} - Xl = M_Y \end{array}\right\}$$

$$\lambda_s \frac{Fl}{2} - 2M_Y = M_Y$$

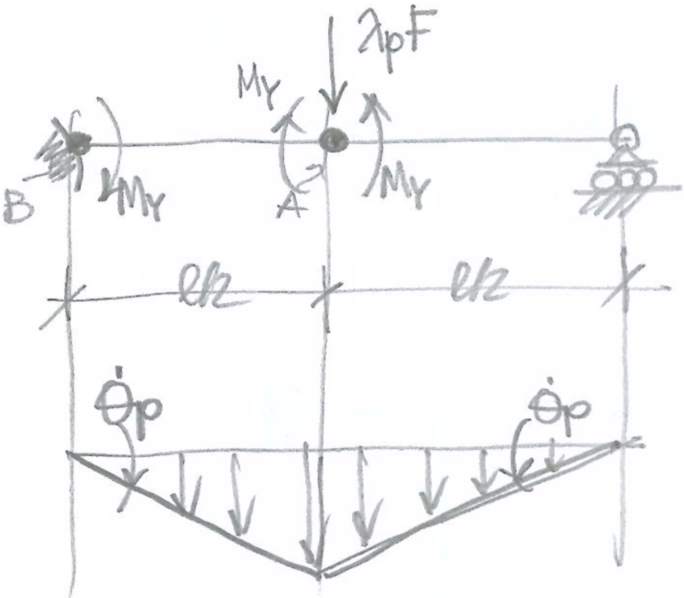
$$\boxed{\lambda_s = \frac{6M_Y}{Fl}} \leq \lambda_c$$

cioè



Approccio cinematico

si ipotizza un atto di moto rigido a collasso
e si misura λ_p (← 2 cerniere plastiche in A e B)



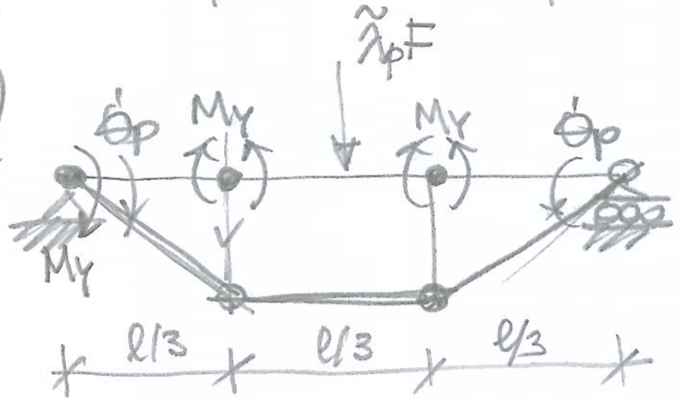
$2M_Y\dot\theta_p$ in A
$1M_Y\dot\theta_p$ in B

$$\lambda_p F \cancel{\dot\theta_p} \frac{l}{2} = 3M_Y \cancel{\dot\theta_p}$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_p = \frac{6M_Y}{Fl}} \geq \lambda_c$$

$$\Rightarrow \lambda_c \equiv \lambda_p \equiv \lambda_s = \frac{6M_Y}{Fl}$$

NB se per esempio si fosse usato un atto a collasso con formazione di più cerniere plastiche



$$\Rightarrow \tilde\lambda_p F \dot\theta_p \frac{l}{3} = 5M_Y\dot\theta_p$$

$$\Rightarrow \tilde\lambda_p = \frac{15M_Y}{Fl} > \lambda_c$$

oppure un M equilibrato (nell'approccio statico) in cui,

$$\begin{cases} Xl/2 = M_Y/2 & \text{in A} \\ \tilde\lambda_s Fl/2 - Xl = M_Y & \text{in B} \end{cases} \Rightarrow \tilde\lambda_s = \frac{4M_Y}{Fl} < \lambda_c$$

avremmo dedotto (come da teoremi)

$$\tilde\lambda_s = 4M_Y/Fl \leq \lambda_c \leq 15M_Y/Fl = \tilde\lambda_p$$