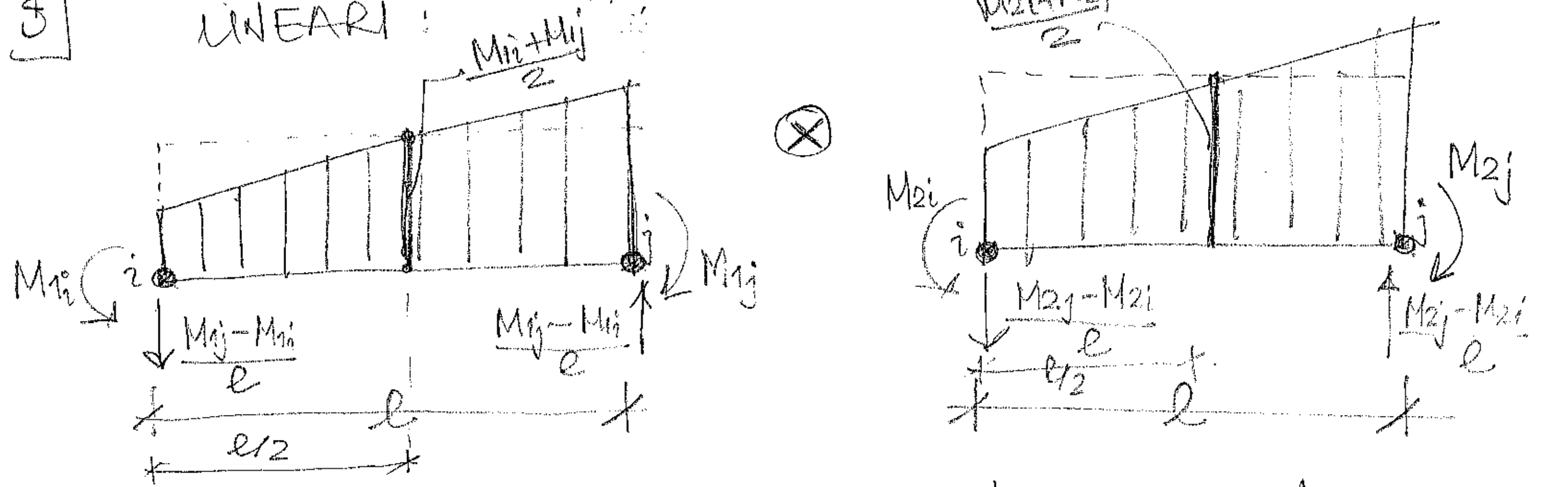
INTEGRALI NOTEVOLI

SU PRODOTTI DI FUNZIONI! $\rightarrow$ $\boxed{\int_0^l M_1 M_2}$

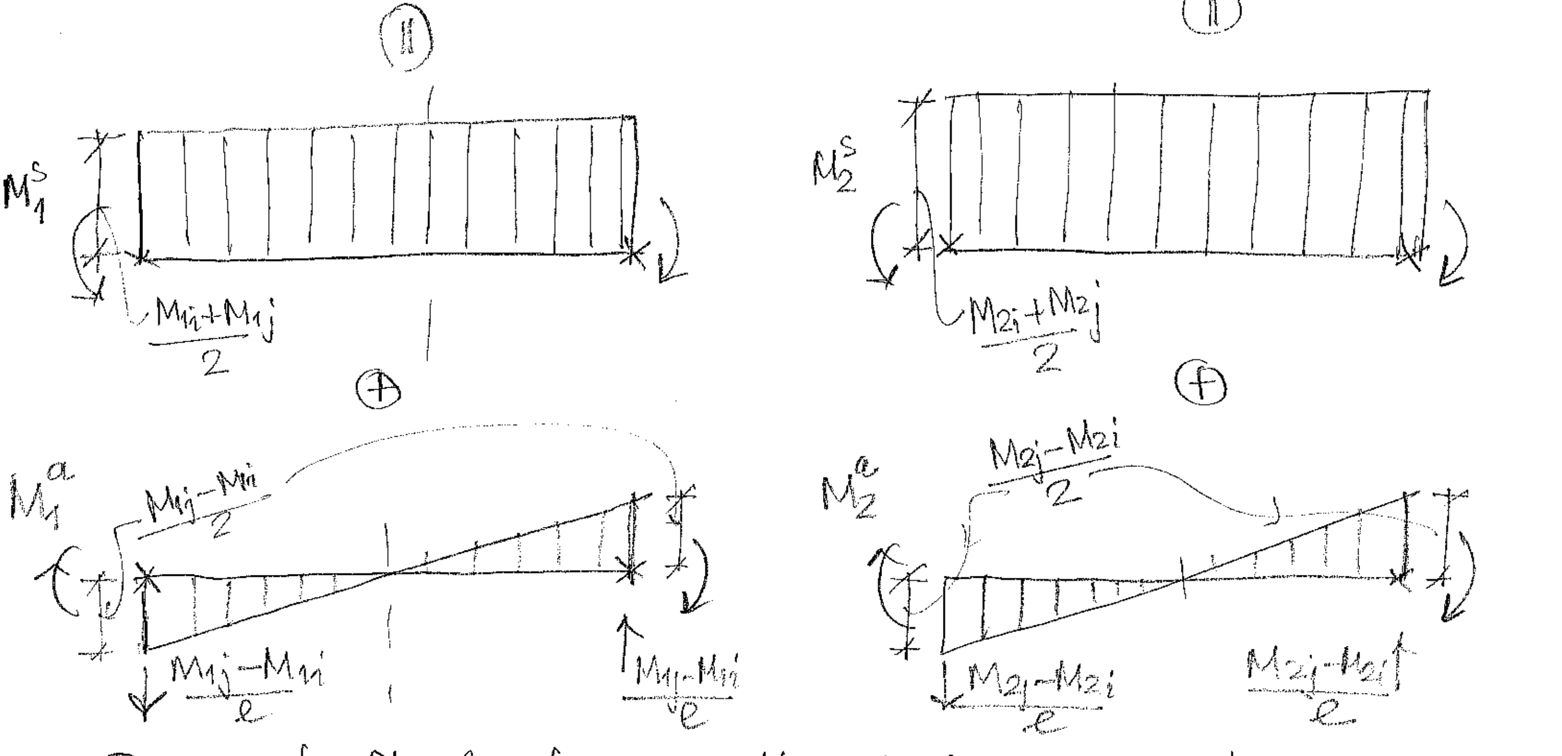
CASO 1

* INTEGRALE DEL PRODOTTO DI DUE LEGGI (MOMENTI) LINEARI:



si suddivida ogni diagramma in una parte simmetrica (a legge costante) e una emisimmetrica

sia M^s la prima e M^a la seconda.



Per valutarli, basta quindi calcolare la semi-somma (media) dei valori di estremità e la semi-differenza.

NB: • il taglio compare solo nei diagrammi emisimmetrici

• la "sommabilità" degli M deriva dalla SOVRAPPONIBILITÀ degli EFFETTI

È facile verificare che l'integrale di una funzione simmetrica (anche non costante) per la funzione lineare emisimmetrica è nullo.

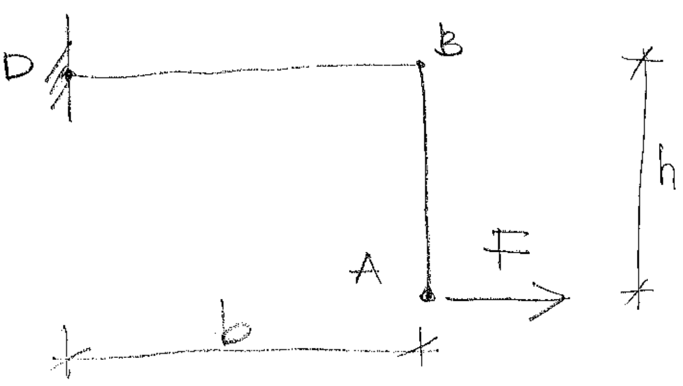
$$\int_0^l M_1^s M_2^a = \int_0^l M_1^a M_2^s = 0$$

Pertanto,

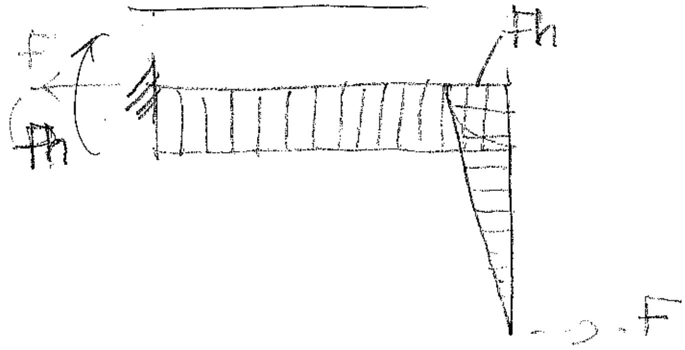
$$\int_0^l M_1 M_2 = \int_0^l M_1^s M_2^s + \int_0^l M_1^a M_2^a$$

$$= \boxed{l \,\frac{M_{1i}+M_{1j}}{2}\cdot\frac{M_{2i}+M_{2j}}{2} + \frac{l}{3}\,\frac{M_{1j}-M_{1i}}{2}\,\frac{M_{2j}-M_{2i}}{2}} \qquad (1)$$

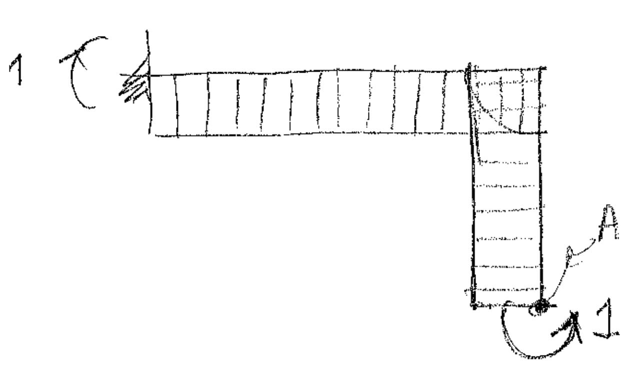
<u>ESEMPIO</u>: calcolo della rotazione della sezione in A con il metodo della potenza (cioè con il princ. forze virtuali)



<u>schema reale</u> M



<u>schema virtuale</u> $\check{M}$



FORZE VIRTUALI

$$1 \cdot \theta_A \stackrel{\downarrow}{=} \int_{\text{Struttura}} \check{M} \frac{M}{EJ} = \frac{1}{EJ} \left[\int_A^B \check{M} M + \int_B^D \check{M} M \right]$$

trave di un unico materiale e a sezione costante

$$\int_A^B \check{M} M = h \frac{1+1}{2} \frac{Fh}{2} + \frac{h}{3} \frac{1-1}{2} \frac{Fh}{2} = \frac{Fh^2}{2}$$

$\check{M}_i = 1,\ \check{M}_j = 1\ ;\ M = 0\ ,\ M = Fh$

$$\int_B^D \check{M} M = b \frac{1+1}{2} \frac{Fh+Fh}{2} + \frac{b}{3} \frac{1-1}{2} \frac{Fh-Fh}{2} = Fhb$$

$\check{M}_i = 1,\ \check{M}_j = 1\ ;\ M_i = Fh\ ,\ M_j = Fh$

$\Downarrow$

$$\theta_A = \frac{1}{EJ}\left(\frac{Fh^2}{2} + Fhb\right) = \frac{Fh}{EJ}\left(\frac{h}{2} + b\right)$$

CASO 2

* INTEGRALE DEL PRODOTTO DI UN MOMENTO A LEGGE QUADRATICA E UNO A LEGGE LINEARE

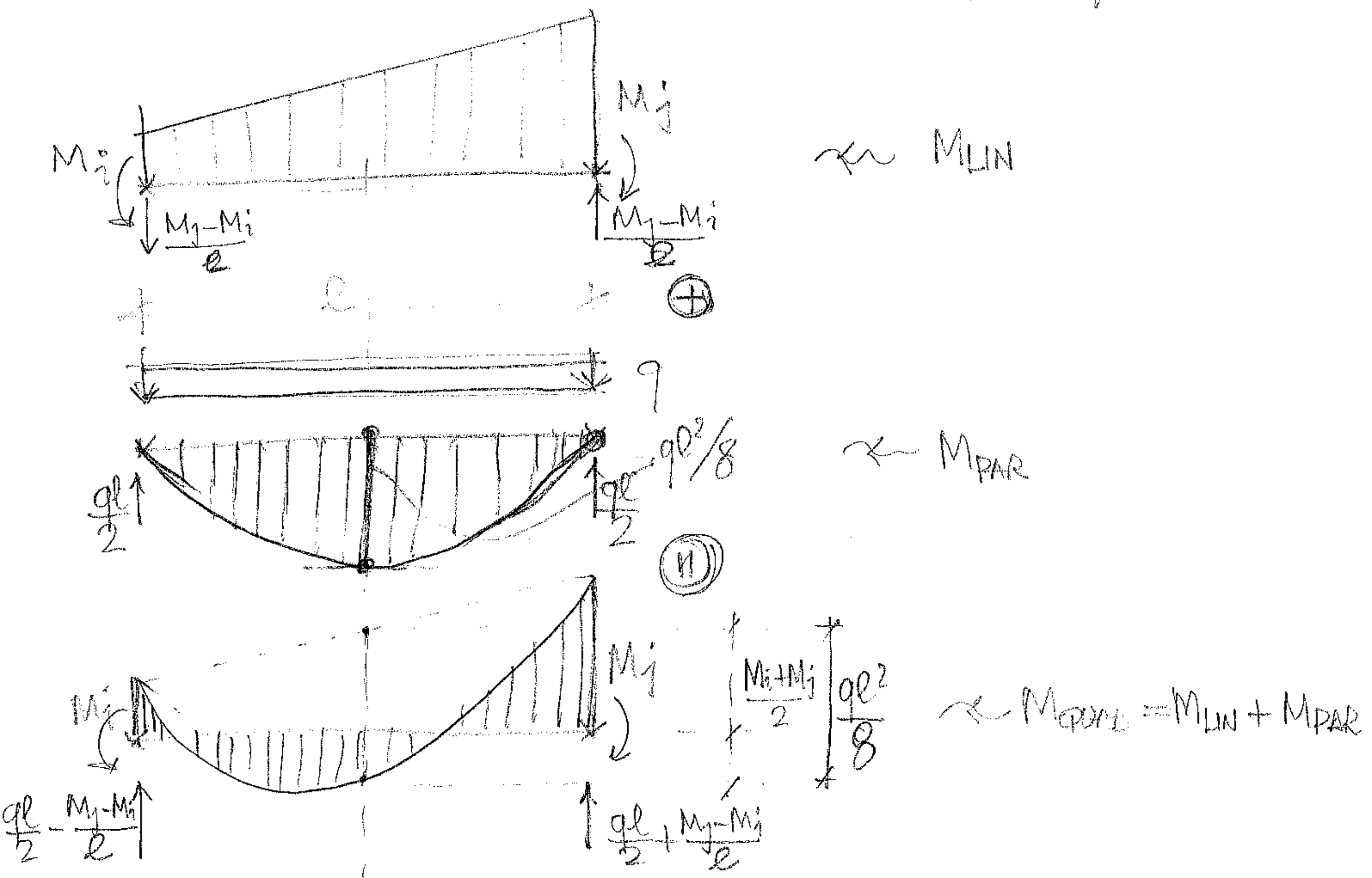
<u>OSS.</u> Il momento a legge quadratica è generato da un carico distribuito uniforme q (in assenza di un μ)

Infatti, dalle eq.ni indefinite di eql. si ha

$$\frac{dT}{ds} + q = 0 \longrightarrow \frac{dM}{ds} + T + \cancel{\mu} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2M}{ds^2} = q$$

Il momento può essere suddiviso in un andamento a legge lineare (fra i due estremi) e uno puro parabolico



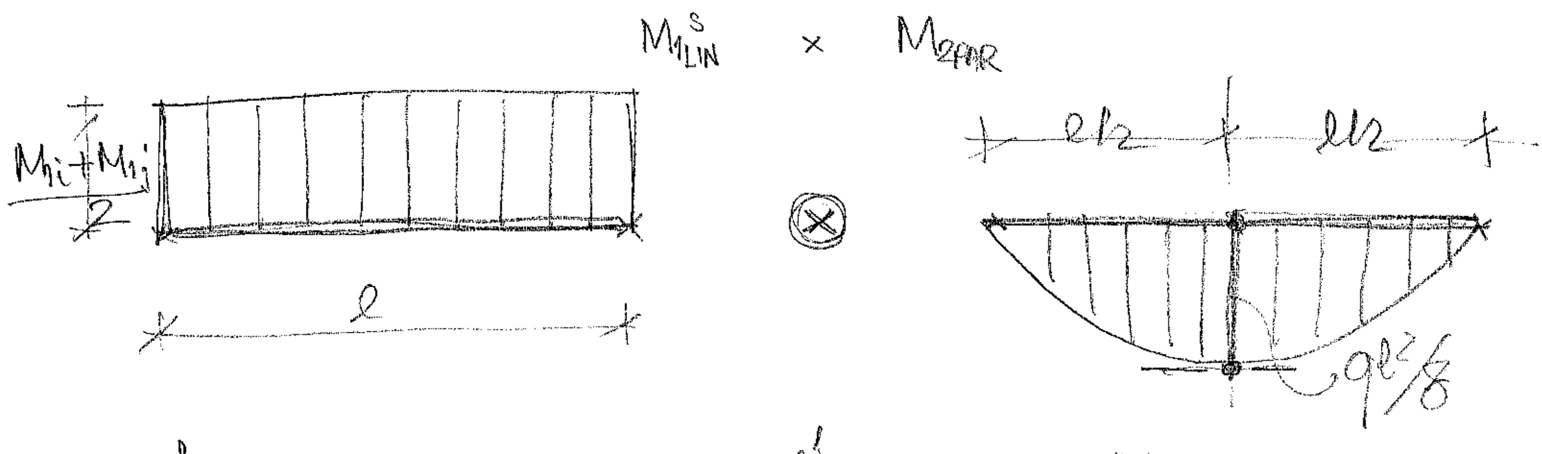
$$\Rightarrow \int M_1 M_2 = \int M_{1LIN}\, M_{2QUAD} = \underbrace{\int M_{1LIN}\, M_{2LIN}}_{\text{prodotto precedentem. risolto}} + \underbrace{\int M_{1LIN}\, M_{2PAR}}_{\text{unico termine da aggiungere}}$$

$$\int M_{1LIN}\, M_{2PAR} = \int M^{s}_{1LIN}\, M_{2PAR} + \underbrace{\int M^{a}_{1LIN}\, M_{2PAR}}_{=0}$$

come visto in precedenza, è NULLO l'integrale del prodotto di una funzione emisimmetrica (M^{a}_{1LIN}) per una simmetrica (M_{2PAR})

QUINDI, alla formula (1) basta aggiungere il seguente prodotto

$$M^{s}_{1LIN} \times M_{2PAR}$$

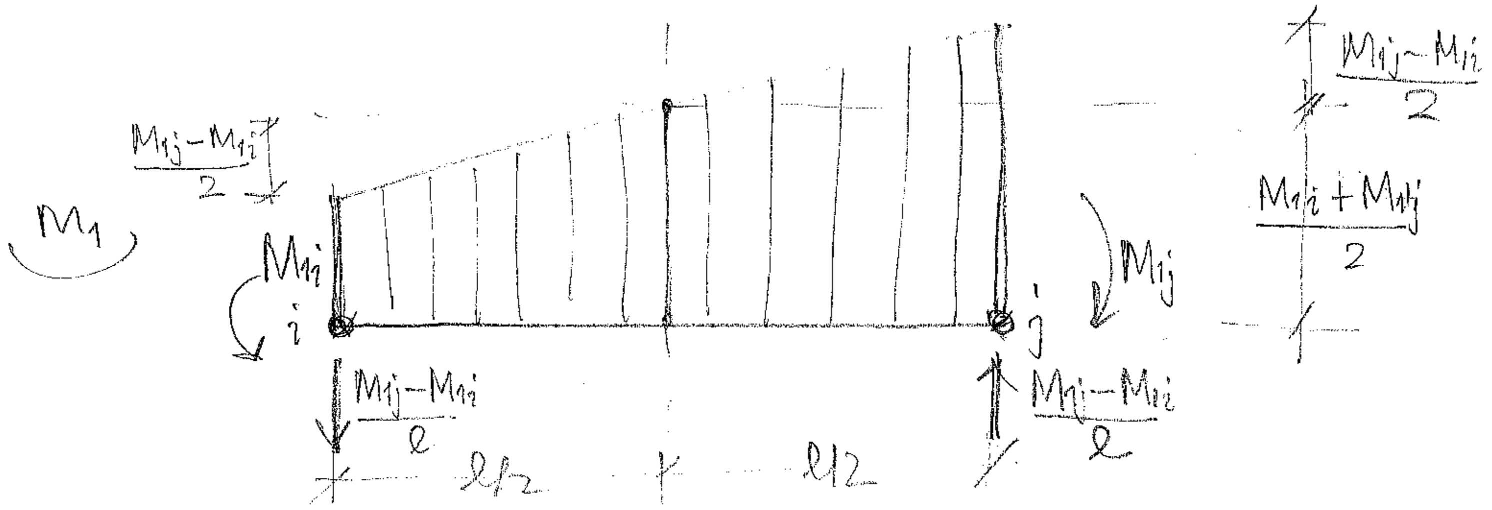


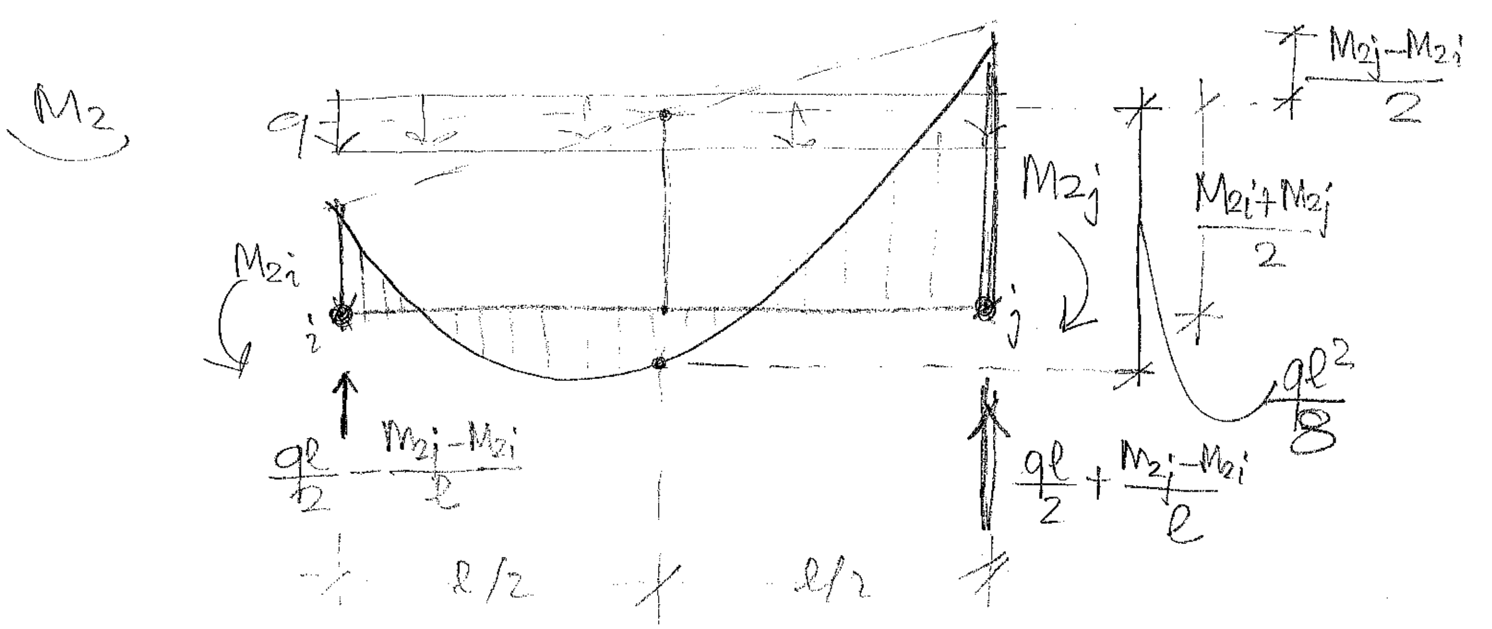
$$\int_0^l M^{s}_{1LIN} \cdot M_{2PAR} = -\frac{M_{1i}+M_{1j}}{2} \underbrace{\int_0^l M_{2PAR}}_{\text{area della parabola}} = -\frac{M_{1i}+M_{1j}}{2}\,\frac{2}{3}\,\frac{ql^2}{8}\,l$$

le fibre tese sono qui assunte discordi

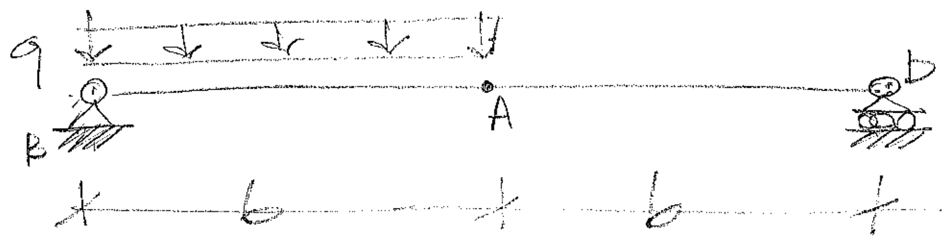
In definitiva,

$$\int_{\substack{\uparrow\\ \text{CASO 1} +\\ \text{CASO 2}}} M_1 M_2 = \boxed{\ell \, \frac{M_{1i}+M_{1j}}{2} \, \frac{M_{2i}+M_{2j}}{2} + \frac{\ell}{3} \, \frac{M_{1j}-M_{1i}}{2} \cdot \frac{M_{2j}-M_{2i}}{2} + - \ell \cdot \frac{M_{1i}+M_{1j}}{2} \, \frac{2}{3} \, \frac{q\ell^2}{8}}$$

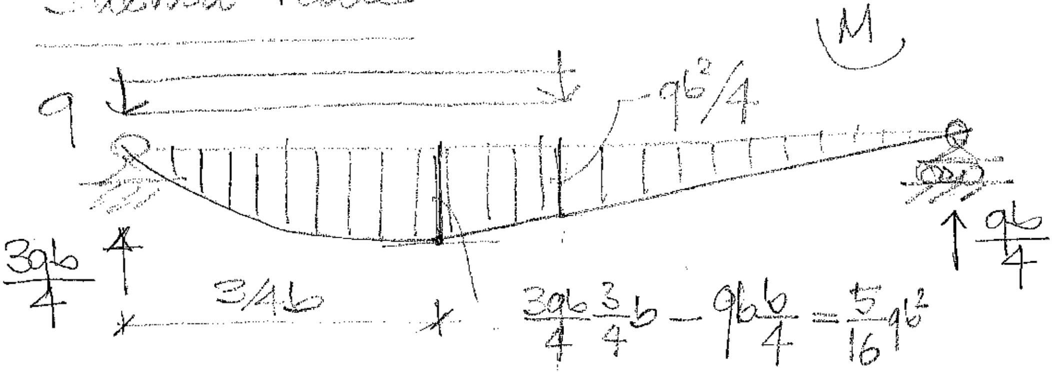




<u>ESEMPIO</u> calcolare lo spostamento della sezione in A per la trave qui in figura, costituita di un unico materiale, e a sezione costante.

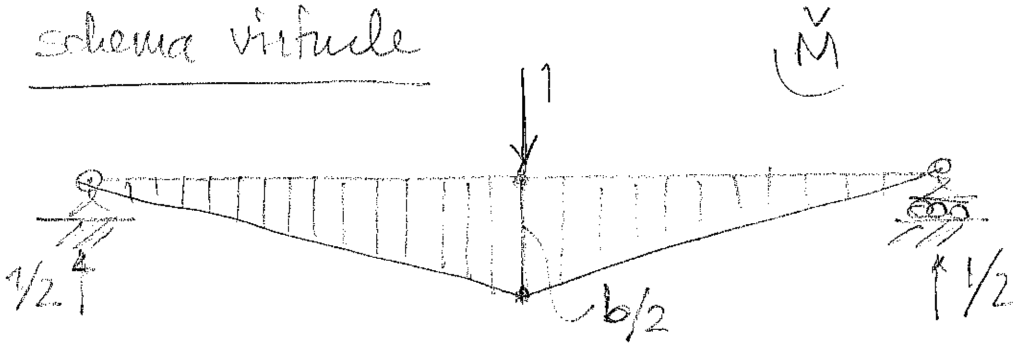


<u>schema reale</u>



$$\frac{3qb}{4}\frac{3}{4}b - qb\frac{b}{4} = \frac{5}{16}qb^2$$

<u>schema virtuale</u>



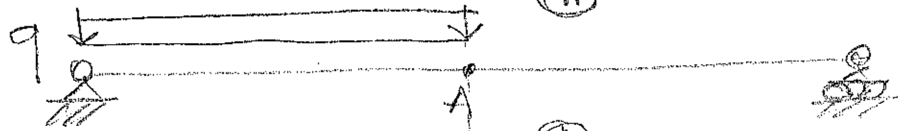
$$1 \cdot v_A \overset{\text{P.F.V.}}{=} \int_{\text{Struttura}} \check{M}\frac{M}{EJ} = \frac{1}{EJ}\left[\int_B^A \check{M}M + \int_A^D \check{M}M\right] = \frac{1}{EJ}\frac{5qb^4}{48}$$

$$\int_B^A \check{M}M = \underbrace{b\,\frac{b/2}{2}\,\frac{qb^2/4}{2} + \frac{b}{3}\,\frac{b/2}{2}\,\frac{qb^2/4}{2}}_{qb^4/24} + b\,\frac{b/2}{2}\,\frac{2}{3}\,\frac{qb^2}{8} = \frac{qb^4}{16}$$

$$\int_A^D \check{M}M = \underbrace{\text{(Parte lin x lin è la stessa)}}_{qb^4/24}$$

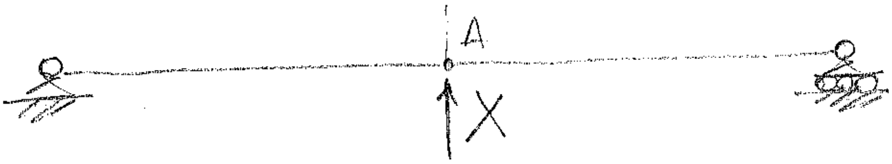
Se lo schema precedente è in realtà una parte di uno schema reale con un vincolo (carrello) in corrispondenza della sezione in A, lo schema complessivo può essere visto come somma di due schemi reali, isolando una incognita iperstatica X ("METODO delle FORZE")

(H)



(schema reale di prima)

(+)



schema con incognita X

Il momento associato a X (per equilibrio) è $-X\check{M}$ ($\check{M}$ quello di prima!)

in questo caso V_A è nullo

$$V_A = \int_{strutt.} \check{M} \frac{M - X\check{M}}{EJ} = 0$$

per calcolare X basta quindi calcolare in più $\int_{strutt.} \check{M}^2$

$$\int_{strutt.} \check{M}^2 = 2 \cdot \left(b \frac{b/2}{2} \frac{b/2}{2} + \frac{b}{3} \frac{b/2}{2} \frac{b/2}{2} \right) = b^3/6$$

$$X = \frac{\int \check{M} M}{\int \check{M}^2} = \frac{5/48\, qb^4}{1/6\, b^3} = \frac{5}{8} qb \rightarrow$$

la soluzione di questo nuovo schema è quella di prima $-5/8$ di quella virtuale