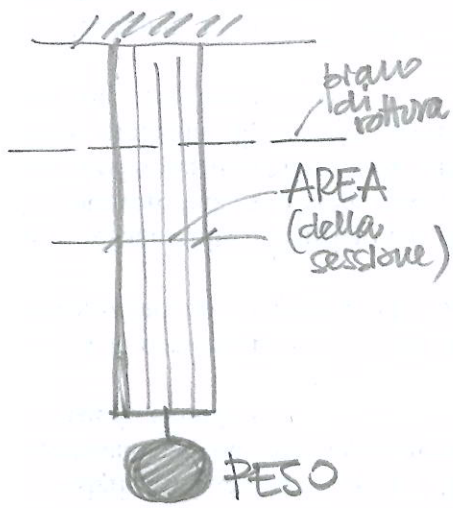
RESISTENZA NELLE TRAVI

LE "ESPERIENZE" GALILEIANE

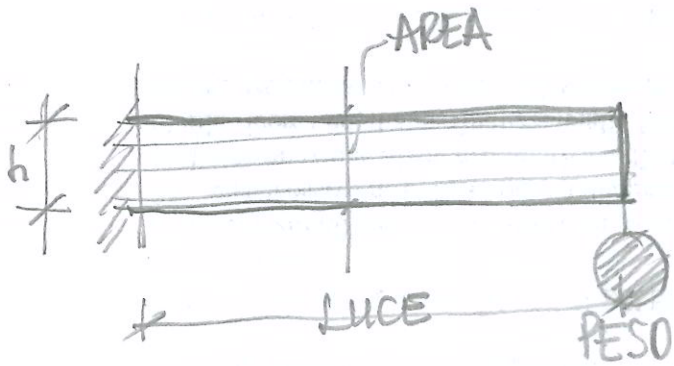
(Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze, 1638)



PRIMA GIORNATA

! La rottura di una trave caricata come in figura avviene su un piano in posizione generica sull'asse della trave

!! A parità di materiale usato, a rottura il rapporto PESO/AREA risulta mediamente costante.



SECONDA GIORNATA

! La rottura avviene in prossimità dell'incastro, nella zona alta della trave

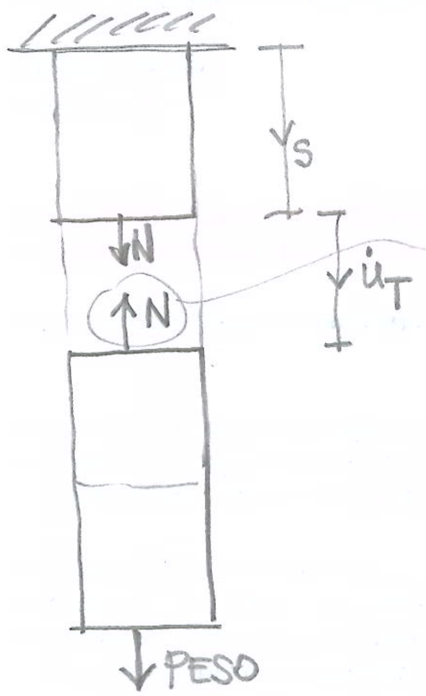
!! A parità di materiale usato, a rottura il rapporto

$$\frac{\text{PESO} \times \text{LUCE}}{\text{AREA} \times h}$$

risulta mediamente costante.

Galileo conclude che, la resistenza è il valore di un'opportuna grandezza di forza interna, valutata nella condizione cinematica di incipiente collasso.

PRIMO PROBLEMA



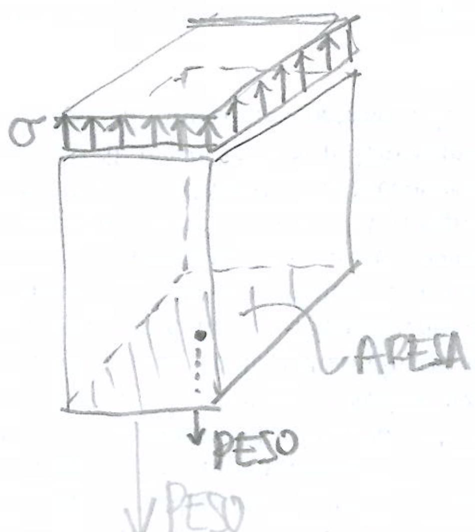
simula l'incipiente collasso.

$$P = 0 \;\forall\, \dot u_T$$

$$P = \text{PESO}\cdot \dot u_T - N \dot u_T = 0 \;\forall\, \dot u_T$$

$$\Rightarrow N = \text{PESO}$$

se ora si immaginano, al posto di N, una distribuzione di forze specifiche σ (forze/superficie) l'equilibrio come $P = 0 \;\forall\, \dot u_T$ si scrive:



$$P = \int_{AREA} \text{PESO}\cdot \dot u_T - \int_{AREA} \sigma \dot u_T = 0 \;\forall\, \dot u_T$$

Quindi, per lo stesso equilibrio si ha che

$$N = \int_{AREA} \sigma$$

Se si ipotizza una distribuzione di σ costanti $\equiv \sigma_0$ si ha

$$N = \sigma_0 A \;\rightarrow\; \sigma_0 = \frac{N}{A}$$ è una buona misura di confronto

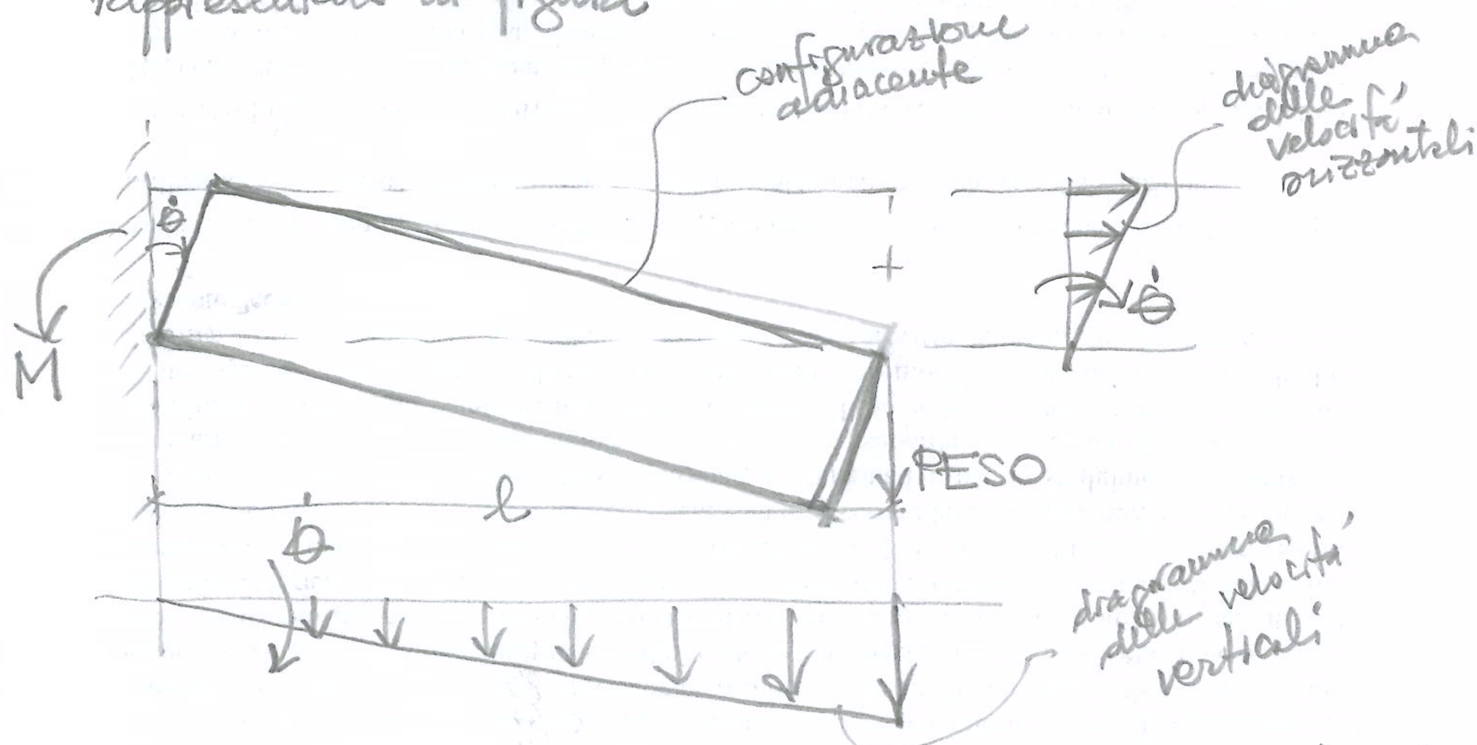
Infatti, detto σ_y un valore di resistenza specifica (cioè per unità di area) di una trave di un certo materiale la disuguaglianza

$$\sigma_0 = \frac{N}{A} \leq \sigma_y$$

garantisce in modo ottimale la capacità strutturale.

SECONDO PROBLEMA

Si ripeta analogamente per la mensola.
Si immagini una cinematica di incipiente collasso.
Come immaginato da Galileo si costruisce l'AMR rappresentato in figura



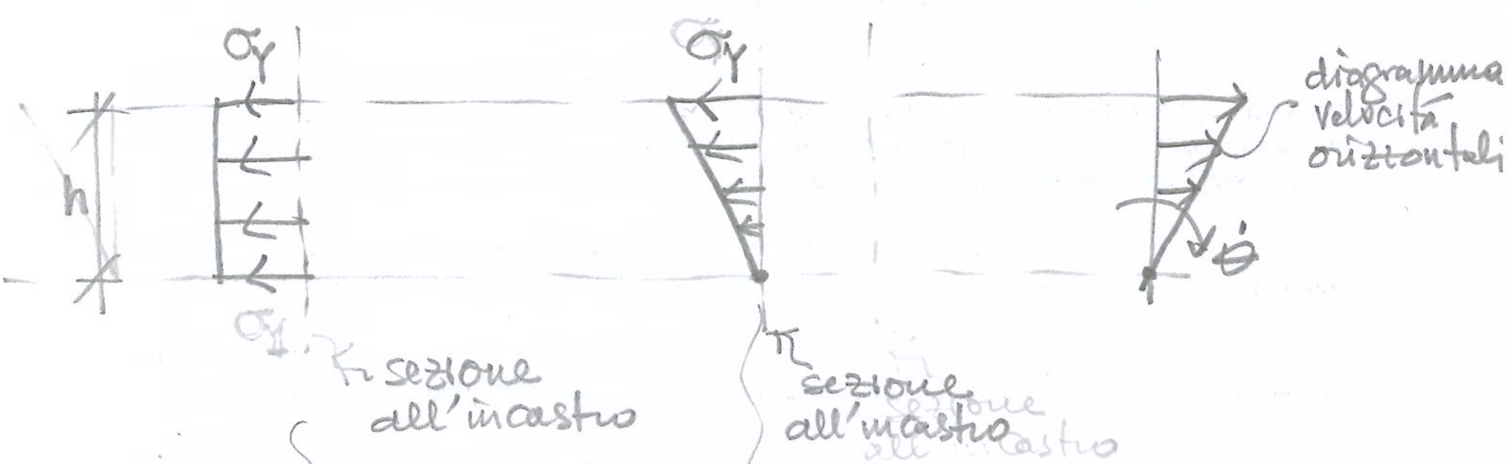
Si può postulare l'esistenza di M all'incastro tale che

$$\forall \dot{\theta} \quad 0 = \mathcal{P} = -M\dot{\theta} + \text{PESO} \cdot \dot{\theta}\ell = 0 \quad \forall \dot{\theta}$$

$$\Rightarrow \boxed{M = \text{PESO} \cdot \ell} \quad \text{(risultato già noto)}$$

La questione è ora scegliere quale distribuzione di forze specifiche determini una corretta resistenza del materiale. Infatti, a una diversa distribuzione corrisponde un diverso valore di M e quindi di PESO a rottura. Questa possibilità indusse, in particolare, Galileo stesso in errore.

Per esempio, se nella sezione di incastro si scelgono le due distribuzioni di σ come riportate in figura,



si hanno come potenza spesa delle forze specifiche due valori diversi (ci si limita al caso di sezione rettangolare)

$$-\sigma_y b h \dot\theta \frac{h}{2} \qquad\qquad -\sigma_y \frac{bh}{2} \dot\theta \frac{2h}{3}$$

Entrambi i valori sono uguali a $-M\dot\theta$, ed entrambi danno all'equilibrio PESO · l

$$\underbrace{\text{PESO} \cdot l = \sigma_y \frac{bh^2}{2}}_{\text{risultato A}} \qquad\qquad \underbrace{\text{PESO} \cdot l = \sigma_y \frac{bh^2}{3}}_{\text{risultato B}}$$

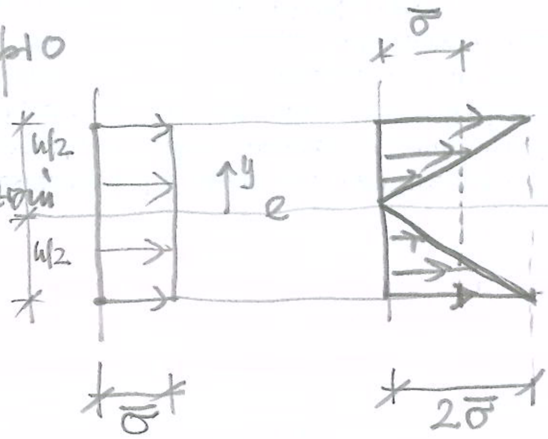
Il risultato B induce a pensare a una resistenza minore di A, perché a parità di σ_y il PESO in A > del PESO in B

La questione sta nel fatto che si sta imponendo l'EQL. a collasso per un particolare AMR, ma l'EQL. sussiste in generale $\forall$ AMR.

Detto in altri termini, le sollecitazioni N e M devono essere equivalenti alla distribuzione delle σ; tuttavia, mentre se è data una distribuzione di forze specifiche le risultanti sono univocamente definite, il contrario non ha un risultato univoco.

esempio

le distribuzioni

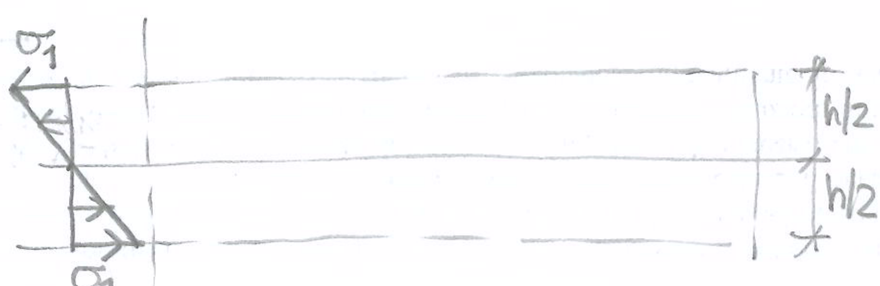


sono entrambe EQUIVALENTI A

$$N = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\sigma}\, dy$$

Nel PRIMO problema questo requisito è soddisfatto; nel SECONDO NO.

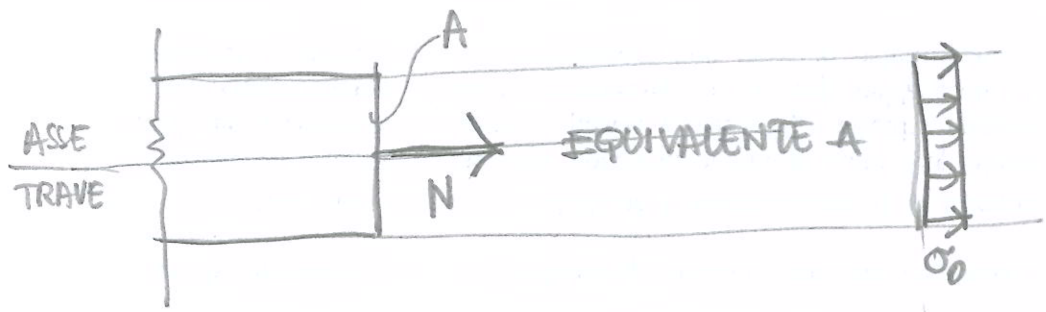
Bisogna quindi ammettere per il SECONDO problema una distribuzione di σ all'incastro di tipo emisimmetrico rispetto all'asse della trave



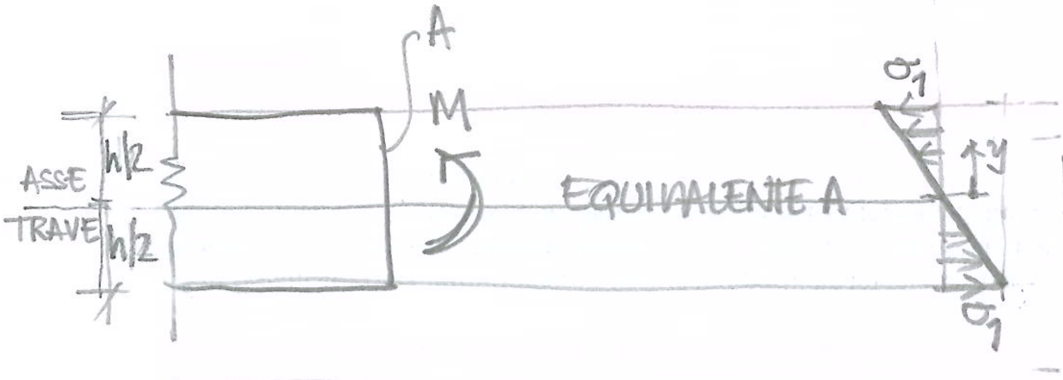
Per la sezione rettangolare si ha quindi un risultato, dimostratosi corretto,

$$\text{PESO} \cdot l = M = \sigma_1 \frac{bh^2}{6}$$

Per una generica sezione, soggetta a N, M si assume quindi una possibile distribuzione σ costante e lineare rispettivamente, come rappresentato in figura



$$N = \int_A \sigma_0 = \sigma_0 A$$



$$M = \int_A \frac{2\sigma_1}{h} y^2 = \frac{2\sigma_1}{h} \int_A y^2$$

In particolare, $\int y^2 dA$ è detto "MOMENTO DI INERZIA" J rispetto all'asse del momento M (nel disegno l'asse è fuori piano)

In generale, per sezioni di interesse ingegneristico vengono direttamente tabellati i valori

$$W = \frac{1}{h/2} \int_A y^2 = \frac{2J}{h}$$

NB se l'asse non cade a metà dell'altezza, si prenderà h_{max} dall'asse al posto di $h/2$

W è detto "modulo di resistenza a momento" perché consente di mettere in relazione la forza specifica massima σ_1 con il valore di M, cioè

$$M = \sigma_1 W$$

Nell'esempio in figura la capacità si verifica nel lembo estremo inferiore della trave come

$$\frac{N}{A} + \frac{M}{W} \leq \sigma_Y$$