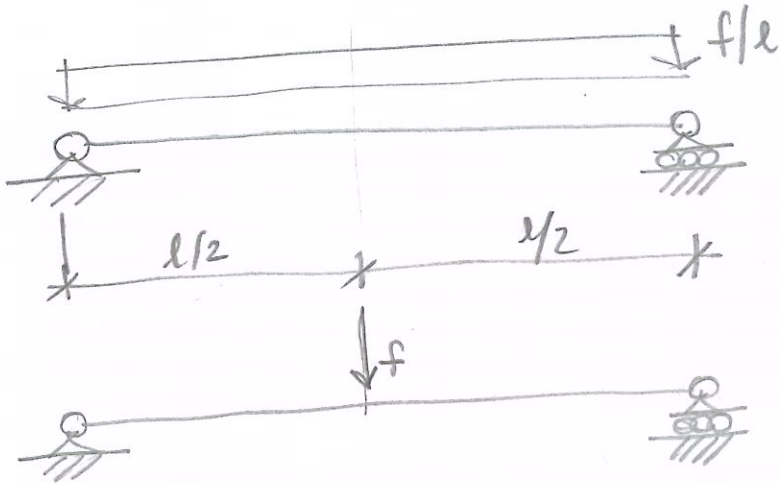


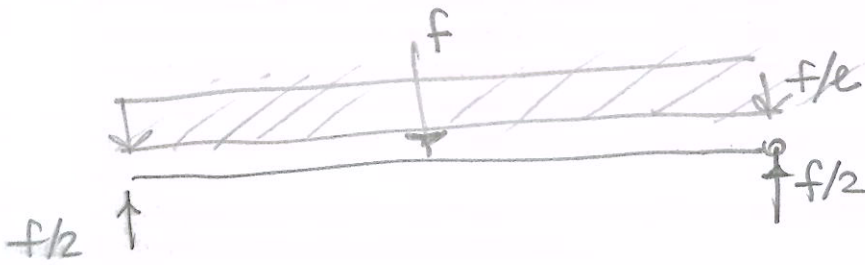
SOLLECITAZIONI - PREMessa

Oa



I due sistemi hanno carichi diversi ma equivalenti (in termini di Potenza spendibile per un AMP)

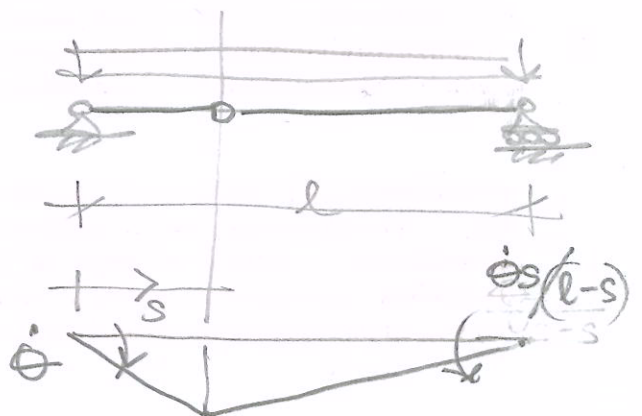
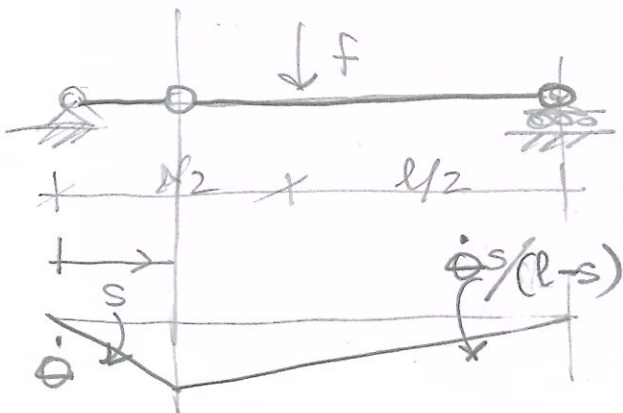
→ le reazioni vincolari sono uguali!



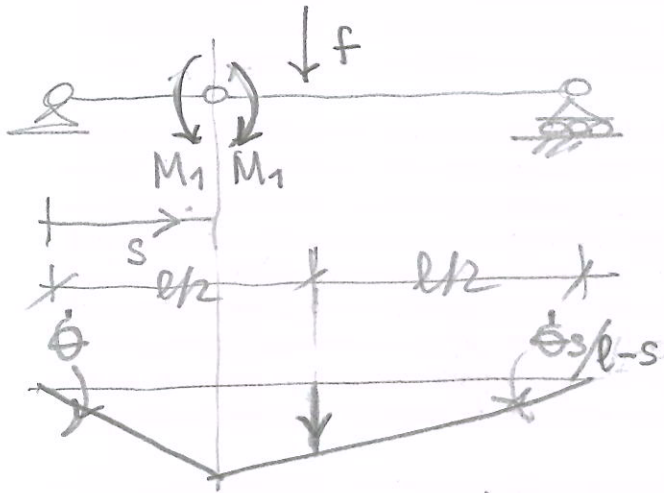
OSS. la struttura nei due casi non può però intendersi sollecitata in ugual misura.

Il vincolo che la trave internamente rigida non può esibire all'equilibrio la stessa forza (interna)

⇒ Si apre una discontinuità interna alla struttura (per esempio, ammettendo una rotazione θ relativa) e si valutino le forze necessarie a che $P=0$



l'equilibrio non può dunque essere garantito dalla presenza di un momento, uguale e contrario fra le due parti (come avviene con le reazioni di una cerniera interna)



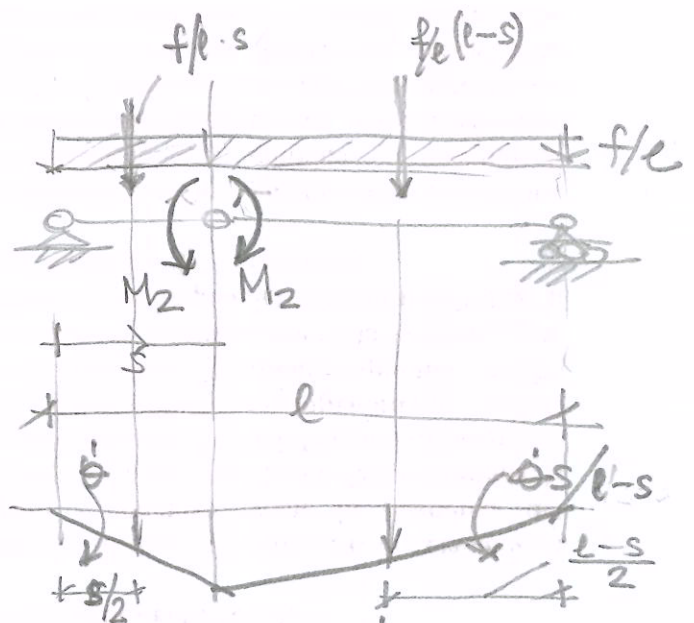
$$\dot{\phi} = -M_1 \dot{\theta} - M_1 \frac{\dot{\theta} s}{l-s} + f \frac{\dot{\theta} s}{l-s} \frac{l}{2} = 0$$

⇓

$$M_1 \dot{\theta} \left(1 + \frac{s}{l-s}\right) = f \dot{\theta} \frac{s}{l-s} \frac{l}{2}$$

$$M_1 \frac{l}{l-s} = f \frac{s l / 2}{l-s}$$

$$\Rightarrow \boxed{M_1 = f s / 2}$$



$$\dot{\phi} = -M_2 \dot{\theta} - M_2 \frac{\dot{\theta} s}{l/2-s} + \frac{f}{l} s \dot{\theta} \frac{s}{2} + \frac{f}{l} (l-s) \dot{\theta} \frac{s}{l-s} \frac{l-s}{2} = 0$$

⇓

$$M_2 \dot{\theta} \left(1 + \frac{s}{l-s}\right) = \frac{f}{2l} \dot{\theta} (s^2 + (l-s)s)$$

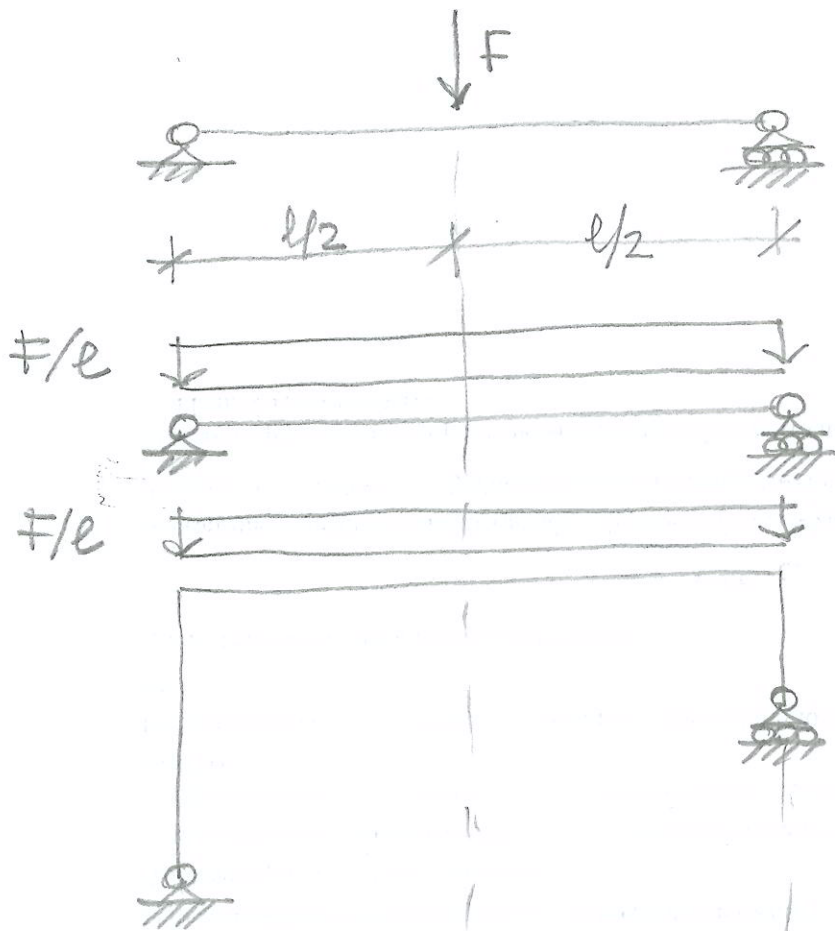
$$M_2 \frac{l}{l-s} = \frac{f}{2l} l s$$

$$\Rightarrow \boxed{M_2 = \frac{f}{2l} s(l-s)}$$

Quindi $M_1 \neq M_2$

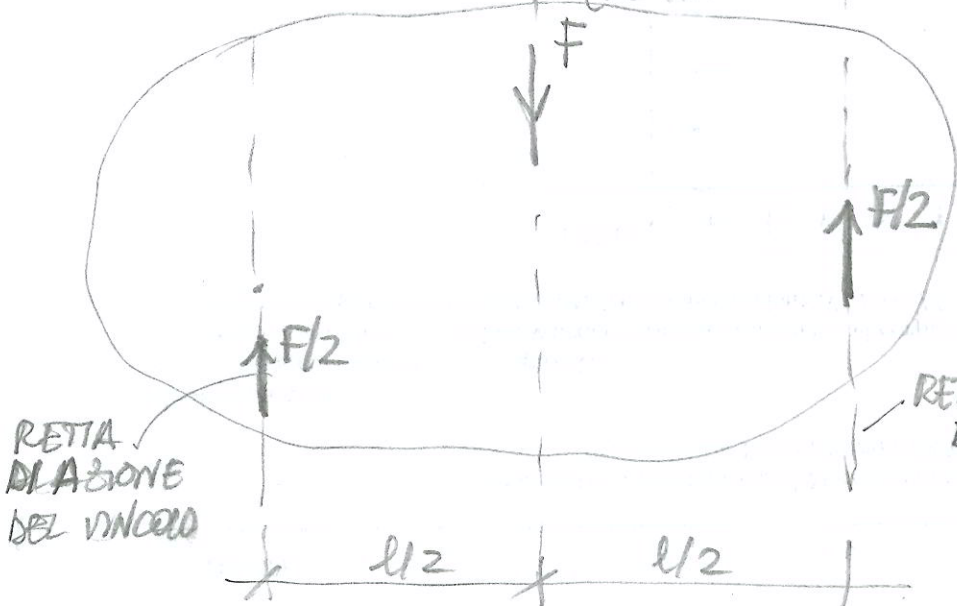
A parità di s considerata $M_2/M_1 = \frac{l-s}{l} = 1 - \frac{s}{l} < 1$
 cioè $\underline{M_2 < M_1}$, come atteso da una evidenza fisica ^{<1}

GARANTERISTICHE DI SOLLECITAZIONE



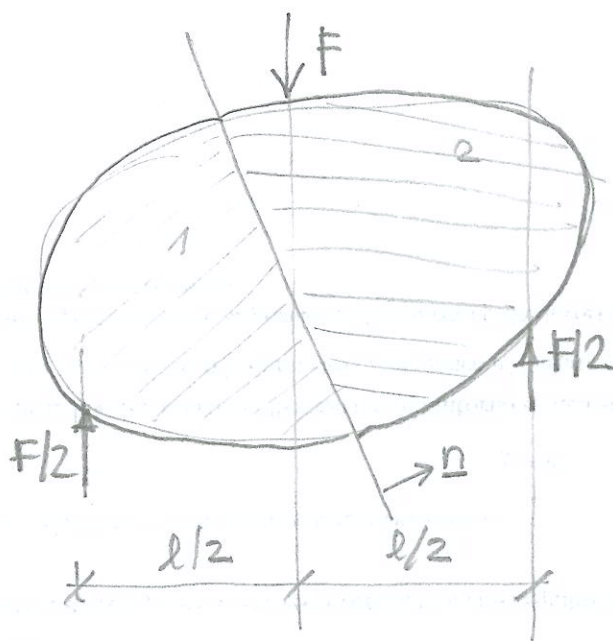
Questi schemi sono tutti equivalenti in termini di reazioni vincolari, ma non in termini di come nei singoli punti la struttura "si sente" sollecitata.

(FORZA EQUIVALENTE AL SIST. DI CARICO)



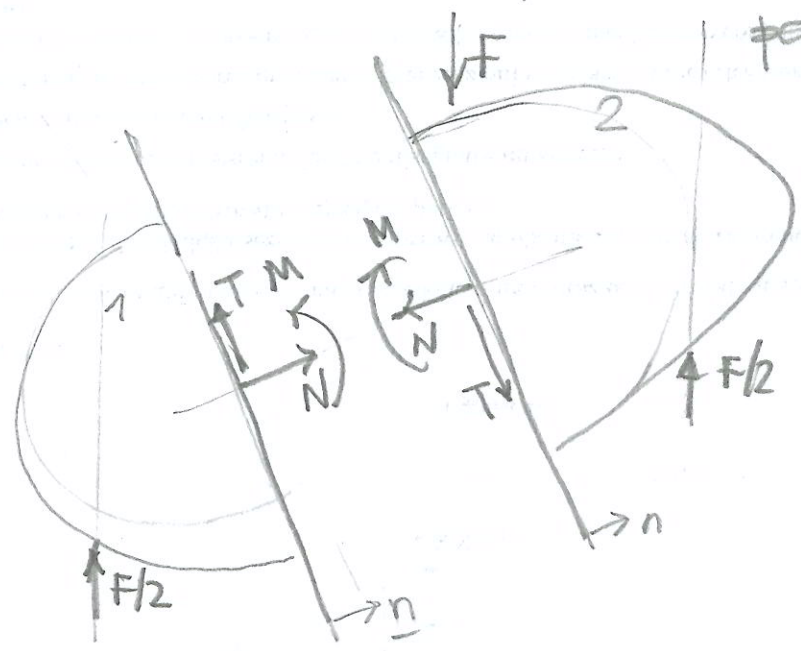
Questo sistema è in equilibrio ed è fatto la struttura!

Per capire come è sollecitata al suo interno, ossia
 (almeno) si dice che una cella finita, bisogna
 si si dice come la struttura
 espliciti il vincolo di rigidità interna.



Per esplicitare questa
 rigidità interna
 si può concettualmente
 operare come per i
 vincoli (esterni).

liberare cioè un atto
 di moto rigido interno
 "spezzando" idealmente
 la struttura in 2
 parti



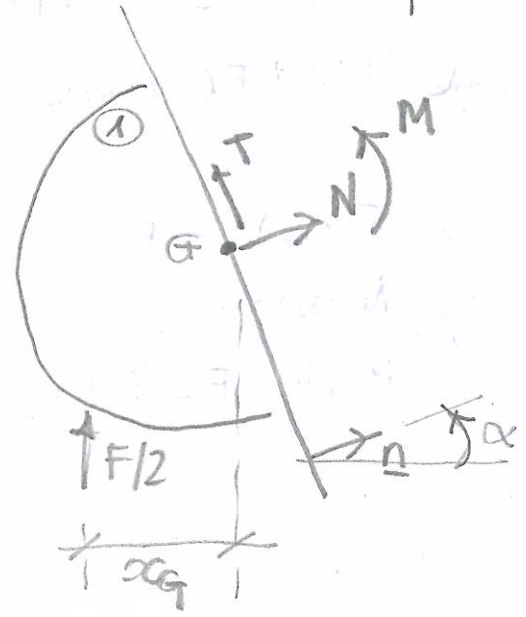
Se le due parti restano unite vuol dire che per
 un atto moto rigido relativo tra le parti stesse
 (una traslazione lungo n , una ortogonale, e una
 rotazione, relative) la Potenza è nulla.

Postuliamo quindi l'esistenza di tre forze
 ("reazioni vincolari interne") N, T, M che consentano
 questo tipo di equilibrio.

tra le parti discusse

Per garantire l'equilibrio, (N, T, M) non possono che essere uguali e contrarie. (N, T, M) prendono il nome di sollecitazioni.

Bisogna ora garantire che il sistema nel suo complesso resti comunque in equilibrio. Ma avendo già garantito l'egl tra le parti 1 e 2 con le stesse (uguali e contrarie) sollecitazioni, l'egl complessivo può essere ricavato imponendo $P=0$ solo per una qualsiasi delle due parti.



$$P=0 \quad \forall AMR$$

\Leftrightarrow

$$\begin{cases} N \cos \alpha - T \sin \alpha = 0 \\ N \sin \alpha + T \cos \alpha + \frac{F}{2} = 0 \\ \frac{F}{2} x_G - M = 0 \end{cases}$$

\Downarrow

$$\boxed{M = \frac{F}{2} x_G}$$

$$N = T \tan \alpha$$

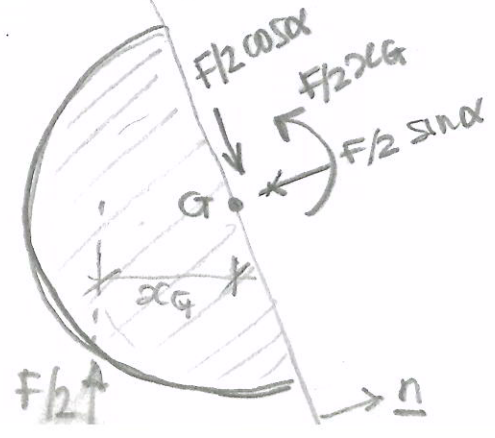
$$T (\sin \alpha \tan \alpha + \cos \alpha) = -\frac{F}{2}$$

$\frac{1}{\cos \alpha}$

$$\boxed{T = -\frac{F}{2} \cos \alpha}$$

$$\boxed{N = -\frac{F}{2} \sin \alpha}$$

Si verifica analogamente che per la parte 2 si ha egl con gli stessi valori di N, T, M qui calcolati



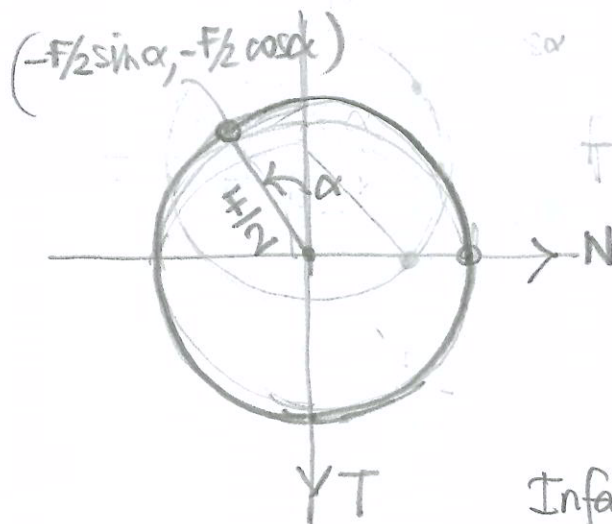
OSS.

* Per la genericità con cui si è operato il taglio in 2 parti della struttura, si può concludere che N, T, M variano proporzionalmente all'orientazione della \underline{n} con cui si effettua il taglio.
 cioè $(\cos\alpha, \sin\alpha)$

Se G è un punto della sezione effettuata, la distanza α_G , essendo la reazione $F/2$ a posizione fissata, dipende a sua volta dall'orientazione di \underline{n} in modo proporzionale.

** fissato G , N, T

N e T stanno su un cerchio di raggio $\frac{F}{2} = \sqrt{N^2 + T^2}$



Tutti i valori di N e T al variare di α si ottengono percorrendo il cerchio in senso antiorario a partire dall'asse verticale.

Infatti per $\alpha = 90^\circ$ e $\alpha = 270^\circ$ $T = 0$ quindi è una forza orizzontale che non equilibria $F/2$ posta in verticale.

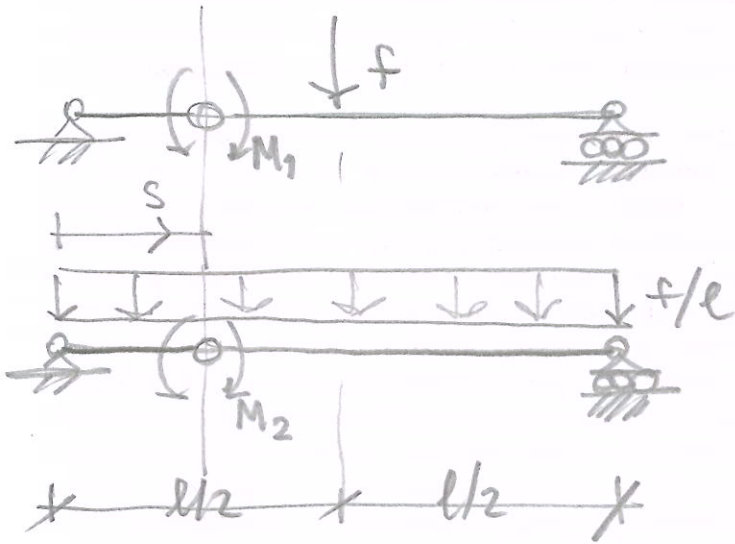
(Analogamente, $N = 0$ per $\alpha = 0^\circ$ e $\alpha = 180^\circ$)

! M invece è costante (sempre pari a $\frac{F}{2} \alpha_G$) fissato G .

DIAGRAMMI DELLA SOLLECITAZIONE

5

Obiettivo: ricostruire l'andamento delle sollecitazioni al variare del taglio con cui si è separata la struttura



Si è già visto che

$$\begin{cases} M_1 = \frac{fs}{2} \\ M_2 = \frac{fs}{2} \frac{l-s}{l} \end{cases}$$

Questo risultato può farci pensare alla possibilità di tracciare due diagrammi di M_1, M_2 in funzione di s

Tuttavia questo è solo parzialmente vero.

Infatti, sia M_1 e M_2 devono essere nulli in $s=0$ e $s=l$ in cui sono presenti vincoli che non reagiscono a rotazione

Ma :

$$M_1|_{s=0} = 0 \quad M_1|_{s=l} = fl/2$$
$$M_2|_{s=0} = 0 \quad M_2|_{s=l} = 0$$

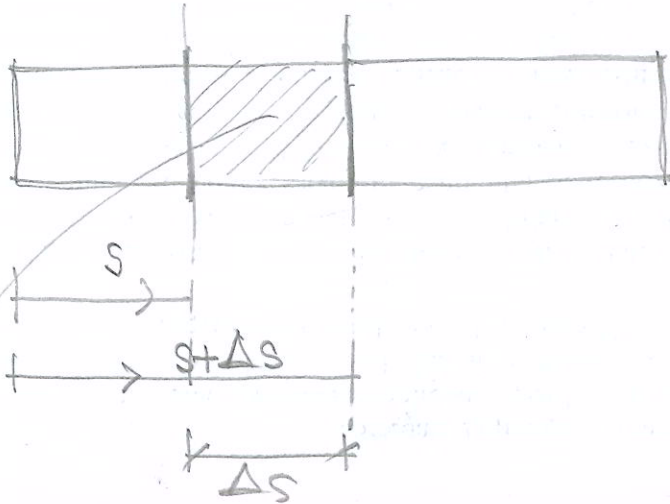
← questo risultato non è corretto. Eppure M_1 è stato calcolato per garantire l'equilibrio!

Questo significa che in presenza di una forza concentrata, l'eql. trovato per una generica disconnessione s della struttura non consente la ricostruzione di una legge di sollecitazione in funzione di s .

EQUILIBRIO INTERNO COME CONDIZIONE LIMITE

→ "EQUAZIONI INDEFINITE
DI EQUILIBRIO"

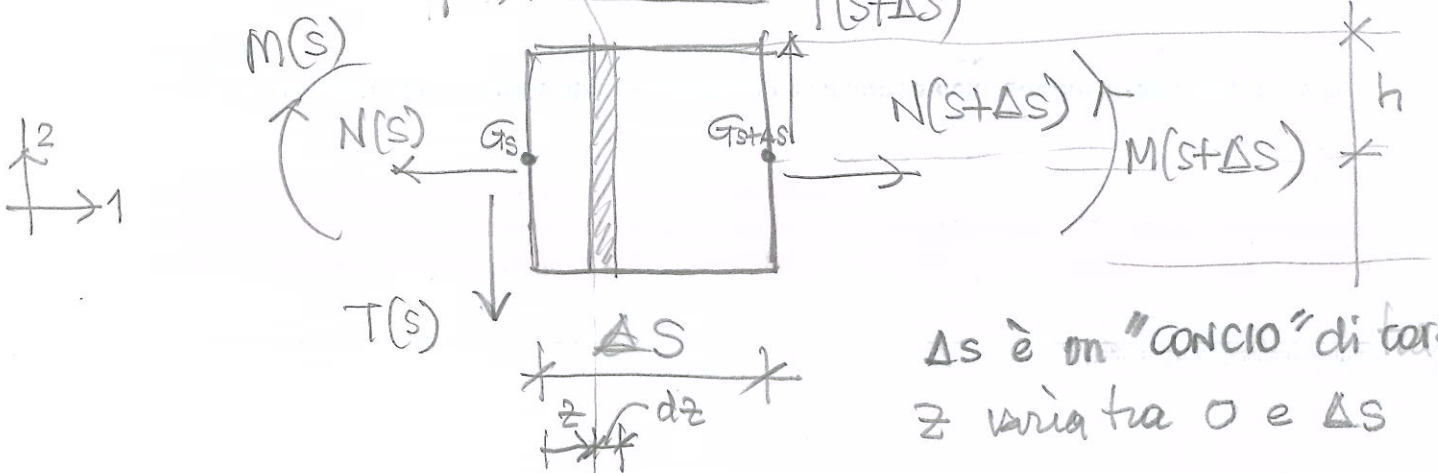
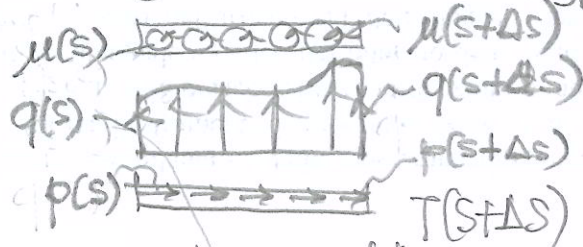
Se si vuole ricostruire una funzione $N(s)$, $T(s)$, $M(s)$ bisogna ammettere una condizione di continuità tra s e $s+\Delta s$, che rispetti anche l'equilibrio.



NB: si sceglie una tipologia strutturale la cui geometria possa essere ricostruita in funzione di una sola ascissa (coordinata) s .
questo solido è la "TRAVE"

Se in s all'equilibrio interno si hanno $N(s)$, $T(s)$, $M(s)$ e, per lo stesso motivo, in $s+\Delta s$ si hanno $N(s+\Delta s)$, $T(s+\Delta s)$, $M(s+\Delta s)$ nel tratto Δs isolato dalle restanti due parti strutturali ci deve essere ancora equilibrio.

A tale equilibrio possono partecipare solo carichi distribuiti, in ragione della genericità con cui si sono scelte le suddivisioni



Δs è un "CONCIO" di trave
 z varia tra 0 e Δs

L'equilibrio del tratto Δs impone due:

$$(1) \begin{cases} N(s+\Delta s) - N(s) + \int_0^{\Delta s} p(z) dz = 0 \\ T(s+\Delta s) - T(s) + \int_0^{\Delta s} q(z) dz = 0 \\ M(s+\Delta s) - M(s) + T(s+\Delta s)\Delta s + \int_0^{\Delta s} \mu(z) dz + \int_0^{\Delta s} q(z)(\Delta s - z) dz = 0 \end{cases}$$

$(C \equiv G_s)$

NB: nell'equazione di eq. alla rotazione rigida, non si considera l'altezza h di posizione di G .

In altri termini, si pensa che $p(s)$, $q(s)$ e $\mu(s)$ agiscano tutti sull'asse s , e si destina in particolare a $\mu(s)$ il significato di momenti distribuiti (momenti per unita' di lunghezza) prodotti, per esempio, dal considerare i momenti di $f(s)$ per braccio h .

se nelle 3 equazioni (1) si divide per Δs e si valuta il limite per $\Delta s \rightarrow 0$ si ottengono delle equazioni differenziali, dette appunto equazioni indefinite di equilibrio

$$(2) \begin{cases} \frac{dN}{ds} + p(s) = 0 \\ \frac{dT}{ds} + q(s) = 0 \\ \frac{dM}{ds} + T(s) + \mu(s) = 0 \end{cases}$$

Per ottenere le eqn. (2), si vede che

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\Delta s} p(z) dz}{\Delta s} = \frac{p(s) ds}{ds} = p(s)$$

Analogamente accade per i termini $\frac{\int_0^{\Delta s} q(z) dz}{\Delta s}$ e $\frac{\int_0^{\Delta s} \mu(z) dz}{\Delta s}$.

Inoltre, si è eliminato il termine nella terza equazione

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\Delta s} q(z) (\Delta s - z) dz}{\Delta s} \rightarrow 0$$

$$\downarrow$$

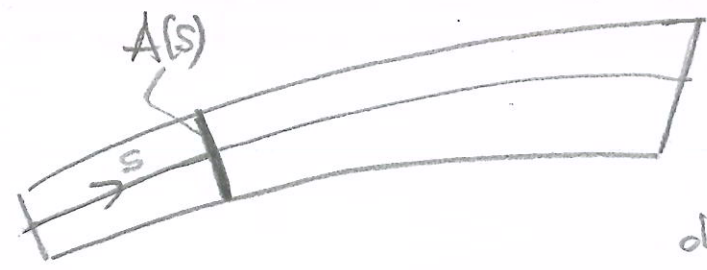
$$\frac{q(s) ds ds/2}{ds} \rightarrow 0$$

perché al numeratore tende a 0 più velocemente del denominatore, in quanto riducendo Δs , la z al numeratore si riduce di più

Le eqn indef. di eqn. (2) valgono sempre se tutte le quantità in gioco possono essere espresse in funzione di un'unica coordinata s .

- * Questo è il motivo per cui tu presenta di una forza concentrata d'ora un errore in $M(s)$, vedi pag. 5
- ** Lo stesso accade quando il corpo in esame non ha una geometria descrivibile in termini di un'unica s .

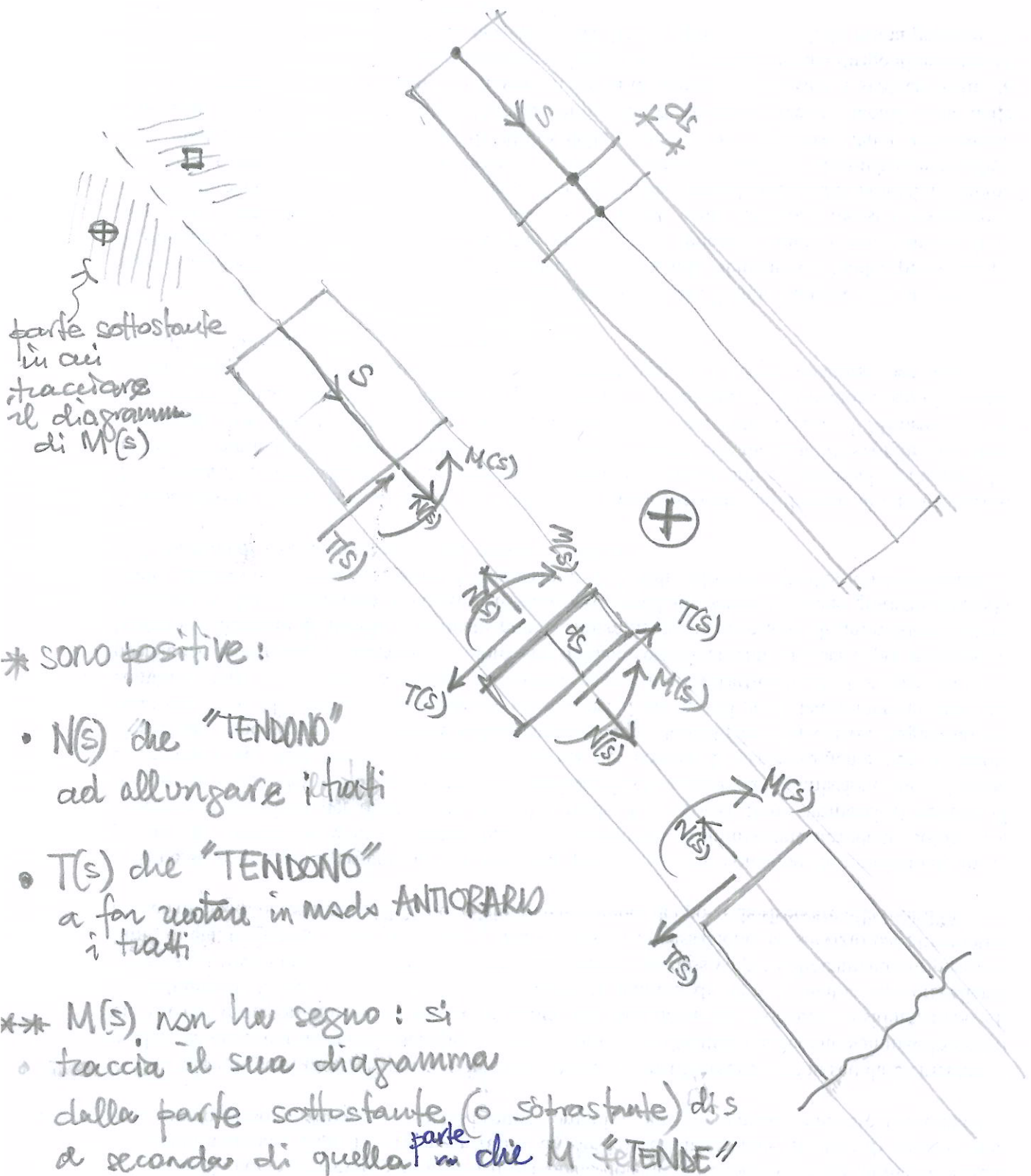
Se ^{invece} $A(s)$ è la SEZIONE della trave, cioè la figura fra cui individuate s sulla trave, il solido in esame rispetta ancora le (2).



È necessario appunto avere una funzione di forma $A(s)$

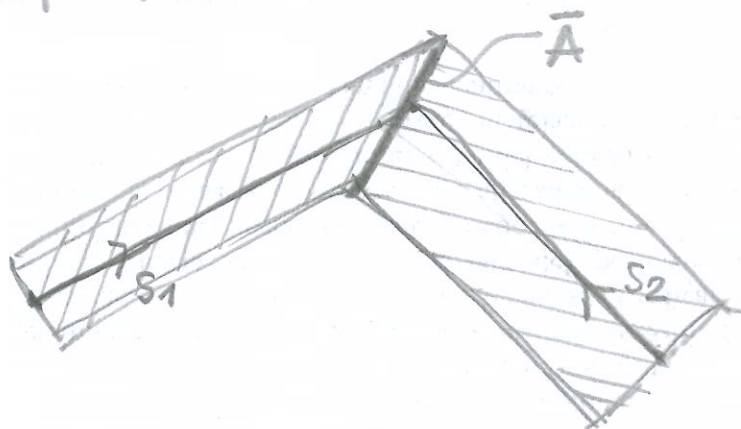
convenzione sui segni di N, T, M

(indipendente della scelta di s
e della sua orientazione)



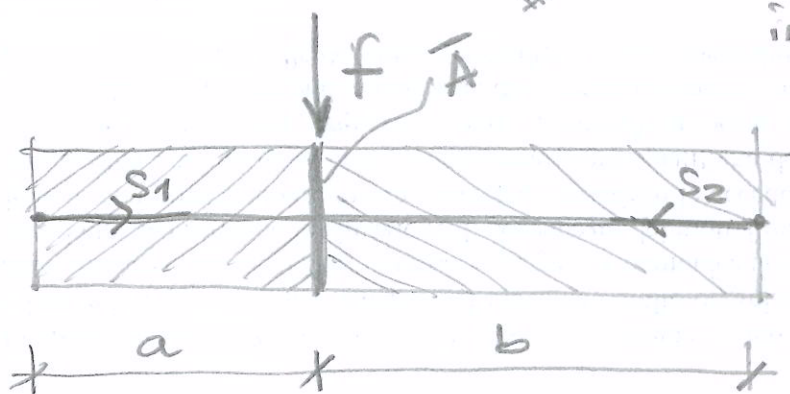
CASI NOTEVOLI IN CUI NON VALGONO LE
EQUAZIONI INDEFINITE D'EQUILIBRIO (EIE)

(1)



in (1) posso al più
ricostituire la geometria
con due ascisse
distinte s_1, s_2

(2)

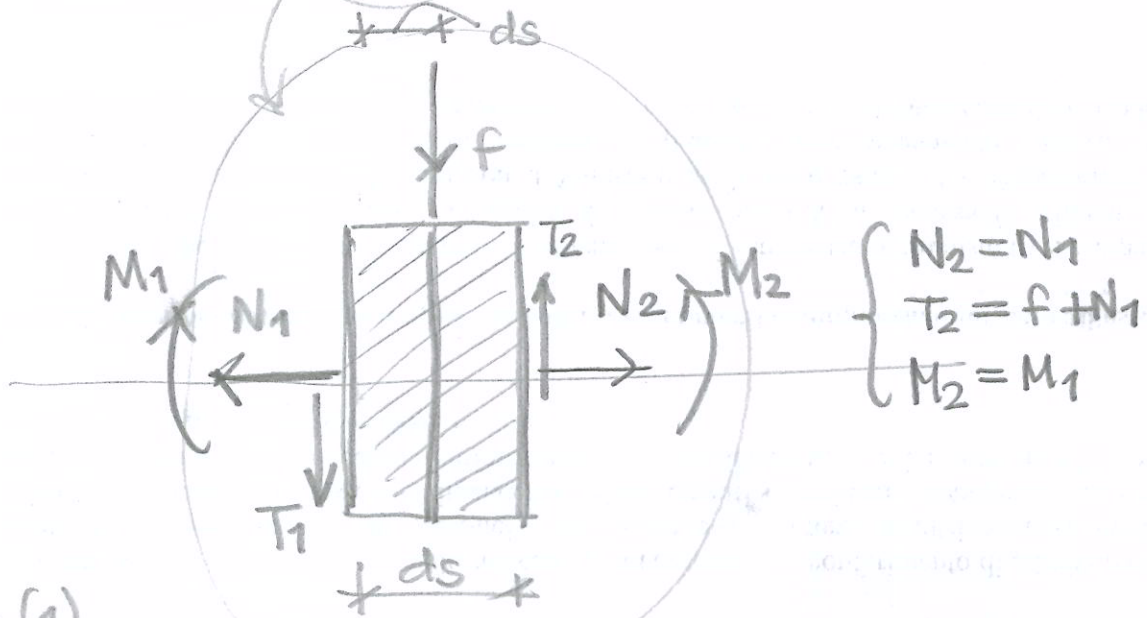
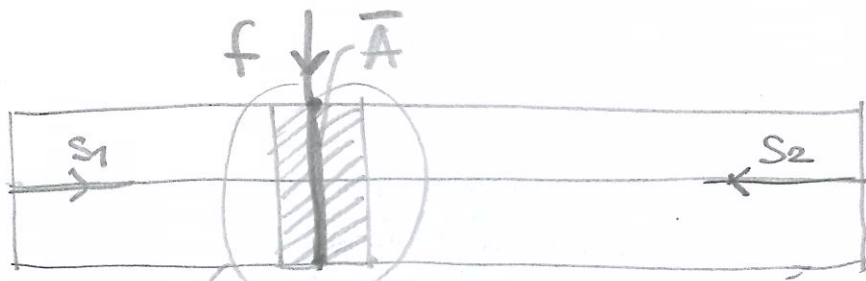


in (2) posso, analogamente,
pensare alla
geometria totale
come generata
da due parti con
due s, s_1 e s_2

i tratti per $s_1 \in [0, a]$ e $s_2 \in [0, b]$ sono due travi
che rispettano
le EIE

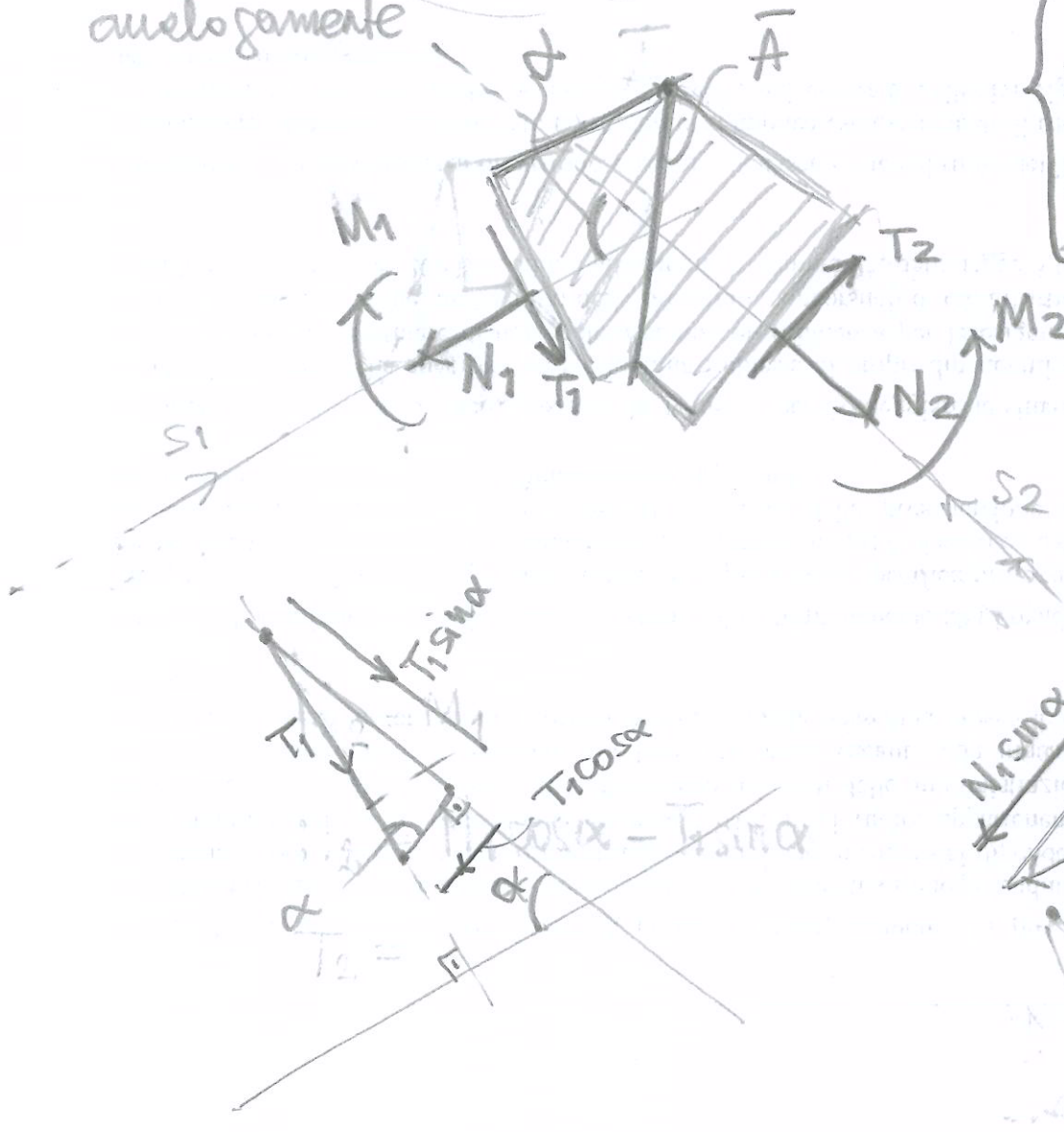
OSS: Nella sezione \bar{A} di giunzione fra le
parti strutturali pensate suddivise
per ammettere una validità a tratti delle EIE,
non siamo in grado di definire leggi per N, T, M
ma siamo certi che, essendo l'intero
corpo in equilibrio, a "ridosso" di \bar{A} le (N, T, M)
relativi alle due parti si equilibrano reciprocamente.
Questo eq. nell'intorno di \bar{A} è una "SOLUZIONE
DI CONTINUITÀ" delle funzioni $N(s), T(s)$ e $M(s)$.

caso(2)

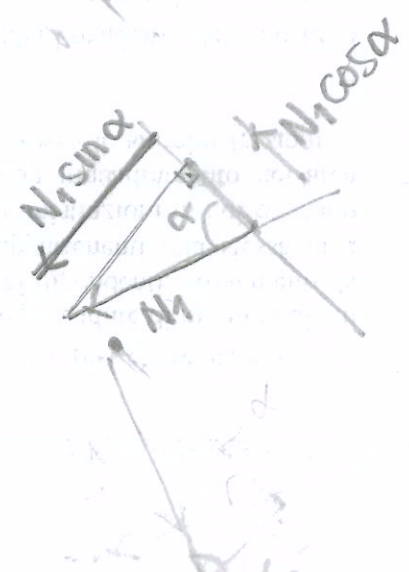
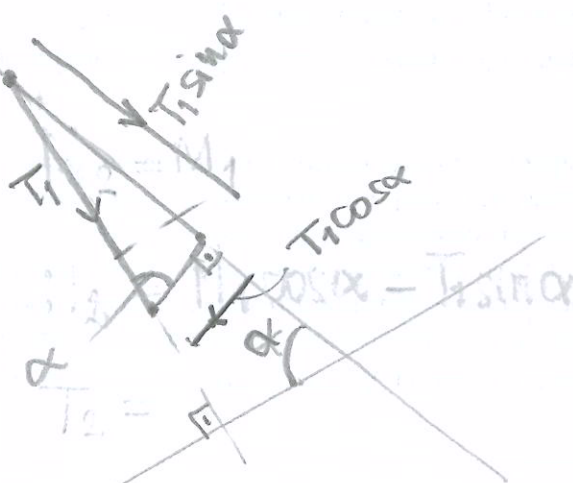


caso(1)

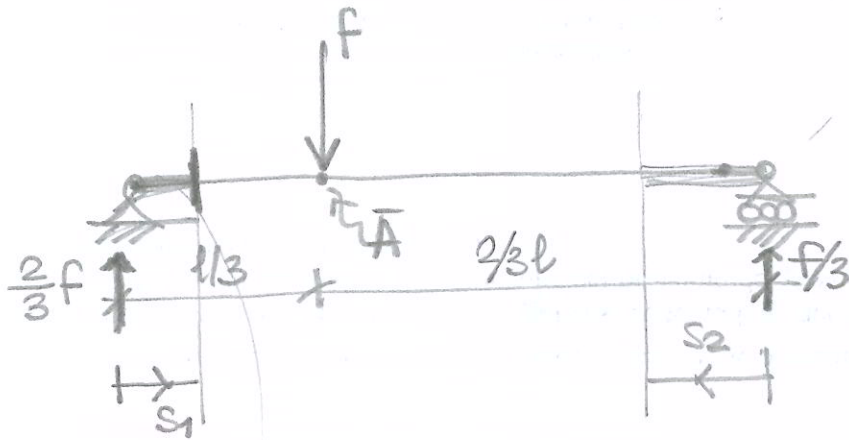
angulo α



$$\begin{cases} N_2 = N_1 \cos \alpha - T_1 \sin \alpha \\ T_2 = N_1 \sin \alpha + T_1 \cos \alpha \\ M_2 = M_1 \end{cases}$$

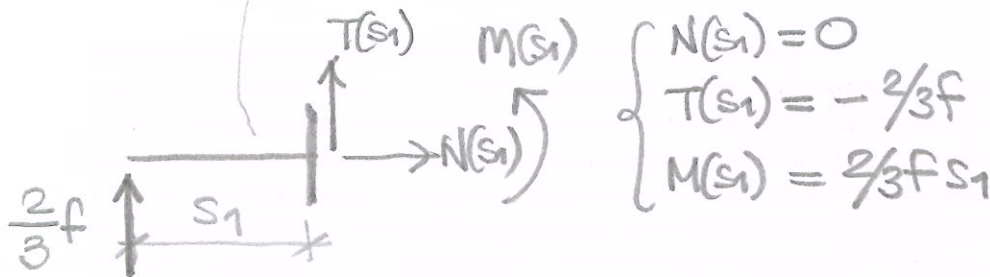


esempio

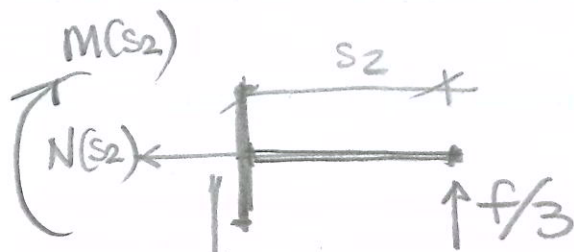


$$s_1 \in [0, l/3[$$

$$s_2 \in [0, 2/3l[$$

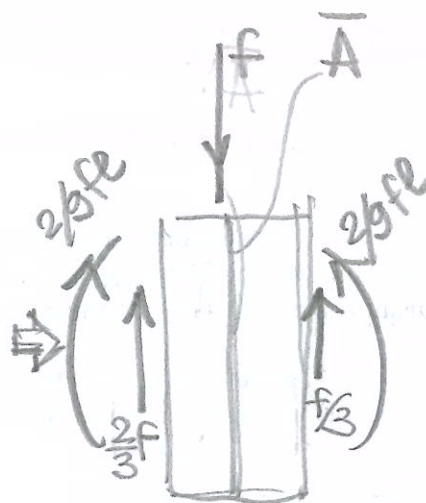
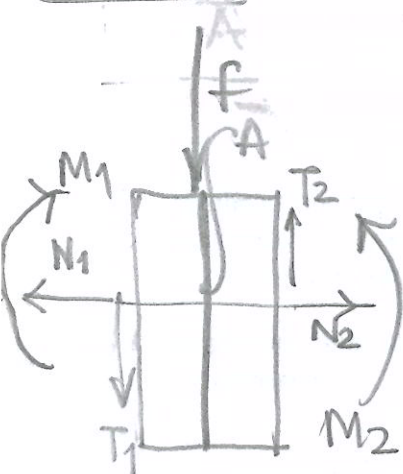


$$\begin{cases} N(s_1) = 0 \\ T(s_1) = -2/3f \\ M(s_1) = 2/3fs_1 \end{cases}$$



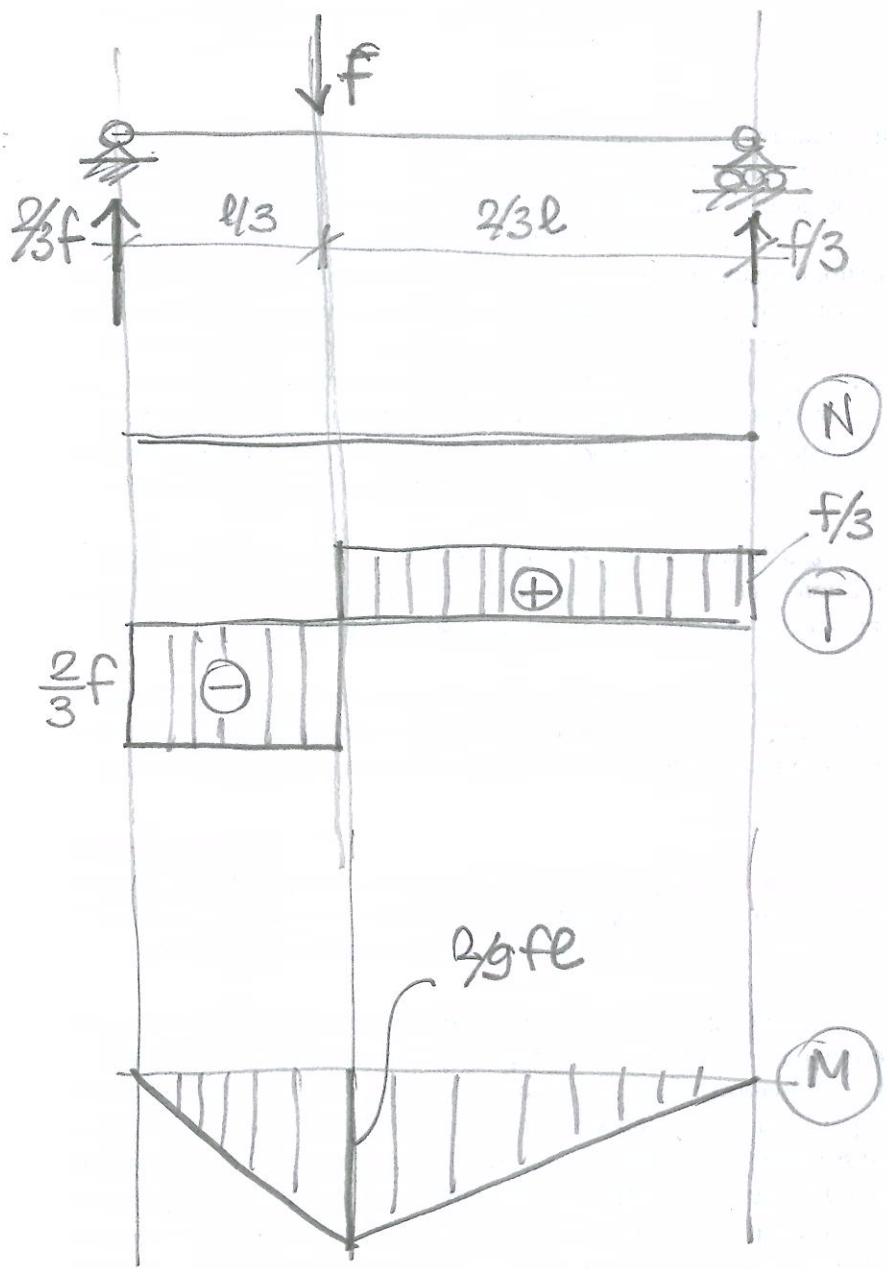
$$\begin{cases} N(s_2) = 0 \\ T(s_2) = f/3 \\ M(s_2) = f/3s_2 \end{cases}$$

in A si ha EQUIL.



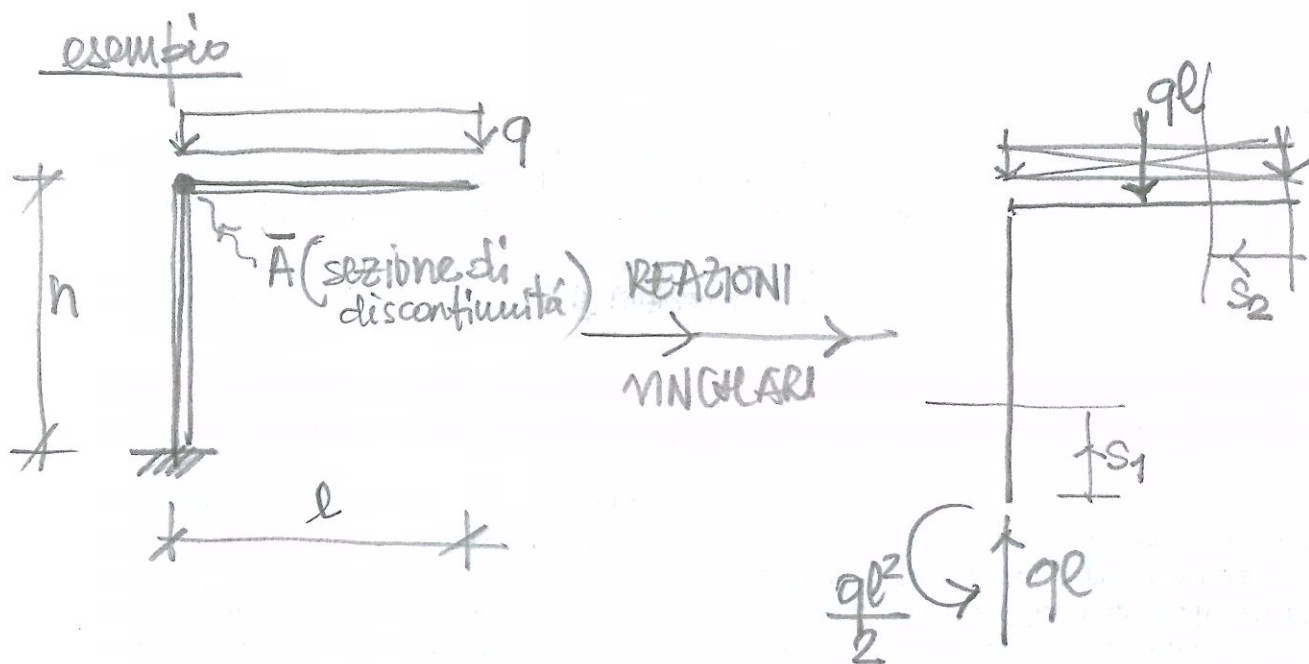
$$\begin{cases} M_1 = \lim_{s_1 \rightarrow l/3} M(s_1) = 2/3 fl \\ M_2 = \lim_{s_2 \rightarrow 2/3l} M(s_2) = 2/3 fl \\ N_1 = \lim_{s_1 \rightarrow l/3} N(s_1) = 0 \\ N_2 = \lim_{s_2 \rightarrow 2/3l} N(s_2) = 0 \\ T_1 = \lim_{s_1 \rightarrow l/3} T(s_1) = -2/3 f \\ T_2 = \lim_{s_2 \rightarrow 2/3l} T(s_2) = f/3 \end{cases}$$

i diagrammi quindi risultano

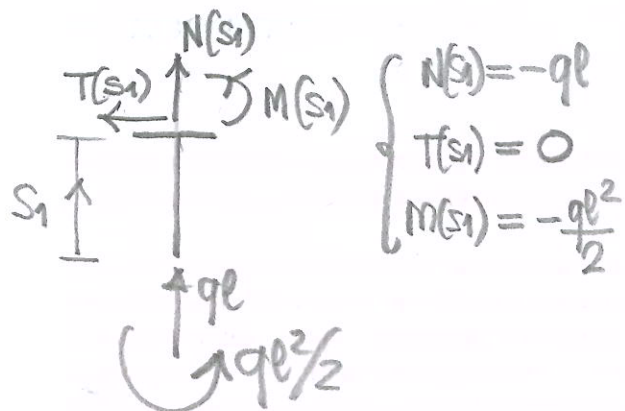


NB Il diagramma della forza di taglio ha un SALTO pari proprio a f in corrispondenza della sezione in cui è applicata f

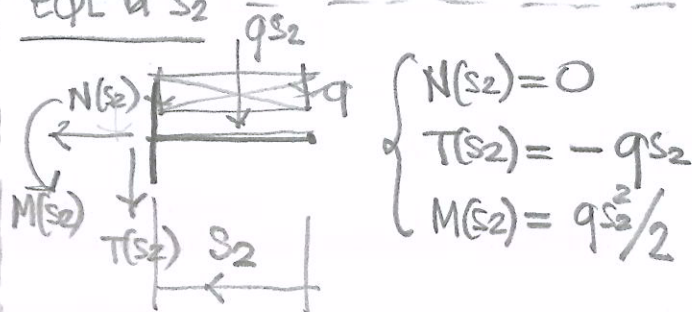
Per lo stesso motivo il diagramma di M ha in questa sezione una CUSPIDE



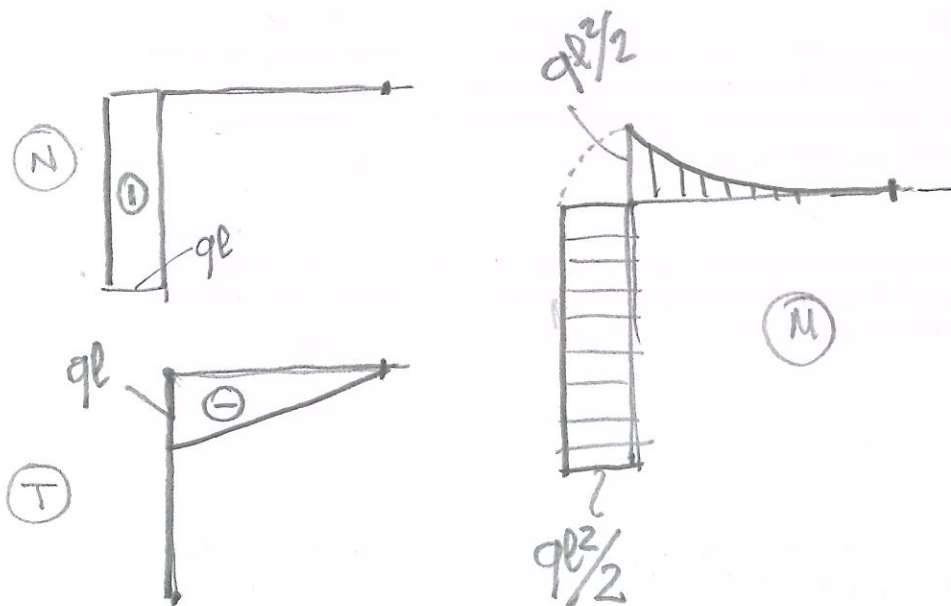
EQL di s_1



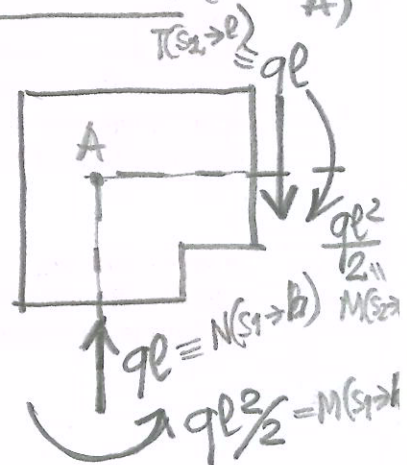
EQL di s_2

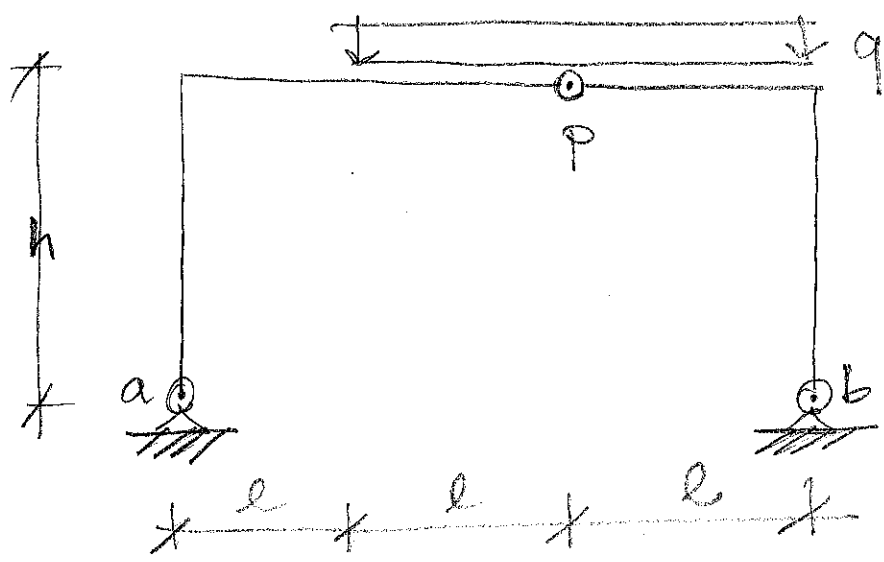


DIAGRAMMI



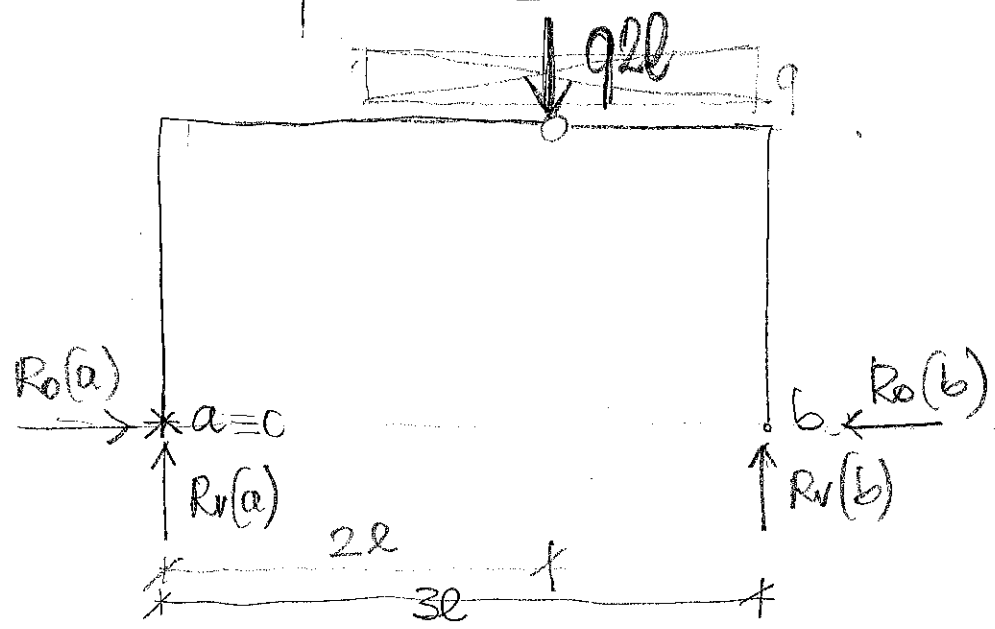
Soluzione di continuità nel nodo A (internodi A)





1. Calcolo reazioni vincolari con CORPI LIBERI

1a. equilibrio globale

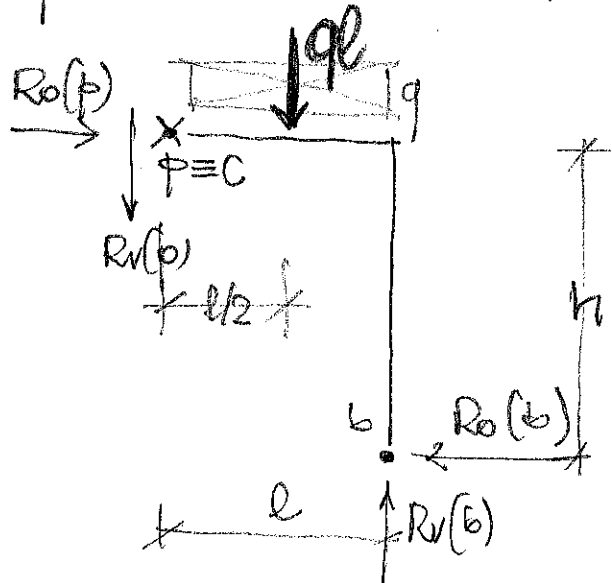


$$\begin{cases}
 R_o(a) - R_o(b) = 0 & (1) \\
 R_v(a) + R_v(b) - q \cdot 2l = 0 & (2) \\
 q \cdot 2l \cdot 2l - R_v(b) \cdot 3l = 0 & (3)
 \end{cases}$$

NB $R_o(b)$ non ha braccio rispetto a $c \equiv a$!!

1b - equilibrio locale a dx

(2)



$$\begin{cases} R_o(p) - R_o(b) = 0 & (4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_v(p) - R_v(b) + ql = 0 & (5) \end{cases}$$

$$c \equiv p \begin{cases} R_v(b)l - ql \frac{l}{2} - R_o(b)h = 0 & (6) \end{cases}$$

\curvearrowright \curvearrowright \curvearrowright

1c. soluzione (in termini di reazioni vincolari)

Dalla (3) equazione di equilibrio calcolo $R_v(b)$

$$R_v(b) = \frac{4}{3} ql$$

Dalla (6), noto $R_v(b)$, calcolo $R_o(b)$

$$R_o(b) = \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{2} \right) ql \frac{l}{h} = \frac{5}{6} ql \frac{l}{h}$$

Dalla (1), noto $R_o(b)$, calcolo $R_o(p) = \frac{5}{6} ql \frac{l}{h}$

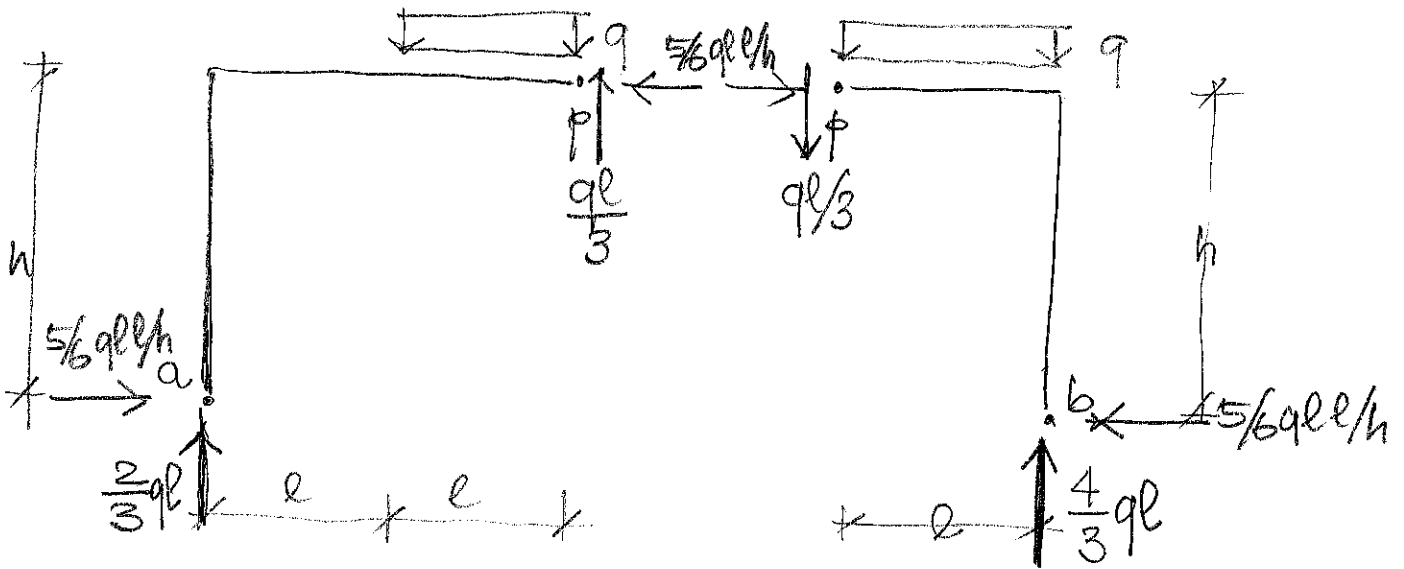
Dalla (2), noto $R_v(b)$, calcolo $R_v(p) = \left(2 - \frac{4}{3} \right) ql = \frac{2}{3} ql$

Dalla (3), noto $R_o(b)$, calcolo $R_o(p) = \frac{5}{6} ql \frac{l}{h}$

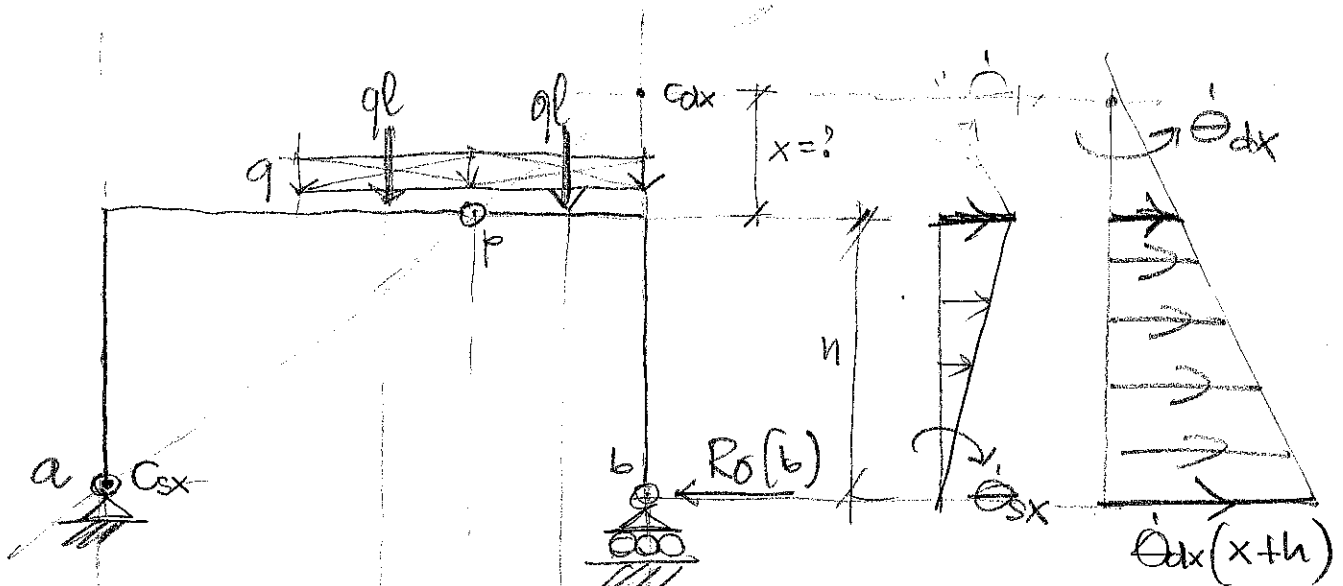
Dalla (4), noto $R_v(b)$, calcolo $R_v(p) = \left(-1 + \frac{4}{3} \right) ql = \frac{1}{3} ql$

1d. rappresentazione finale delle reazioni

(3)



2. Verifica con il metodo della potenza di $R_0(b)$



in ϕ

• velocità verticali uguali

$$\dot{\theta}_{sx} 2l = \dot{\theta}_{dx} l \Rightarrow \dot{\theta}_{dx} = 2\dot{\theta}_{sx}$$

• velocità orizzontali uguali

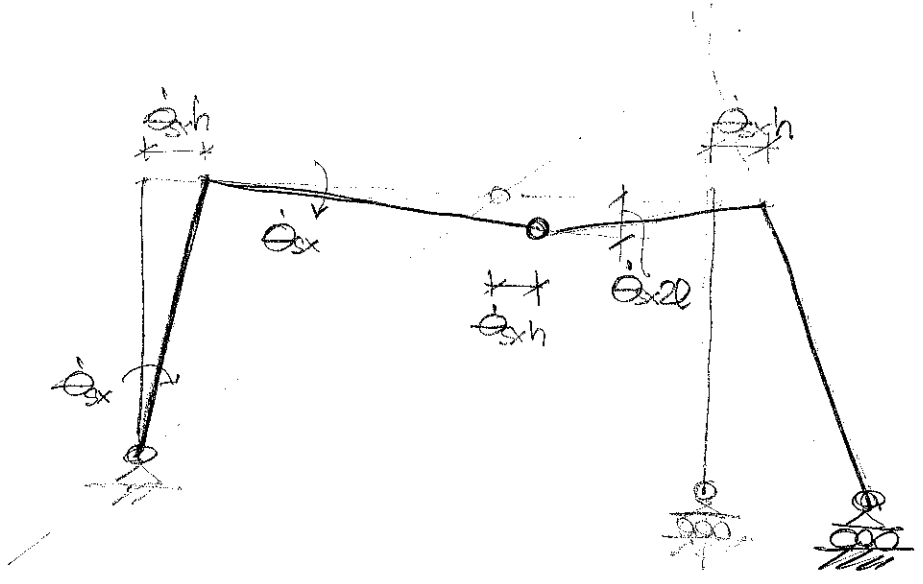
$$\dot{\theta}_{sx} h = \dot{\theta}_{dx} x \Rightarrow 2\dot{\theta}_{sx} x = \dot{\theta}_{sx} h$$

$$\Rightarrow x = h/2$$

NB: poter calcolare alternativamente impostando una proporzione sui triangoli che hanno per ipotenusa tratti che stanno sulla retta $a-p-c_{ax}$: $h/2l = x/l \Rightarrow x = h/2$

2a - disegno dell'AMR sulla struttura

(4)



2b - calcolo della Potenza e soluzione

$$P = ql \dot{\theta}_{sx} \frac{3}{2}l + ql \dot{\theta}_{ax} \frac{l}{2} - R_0(b) \dot{\theta}_{ax}(x+h) = 0 \quad \forall \text{AMR}$$

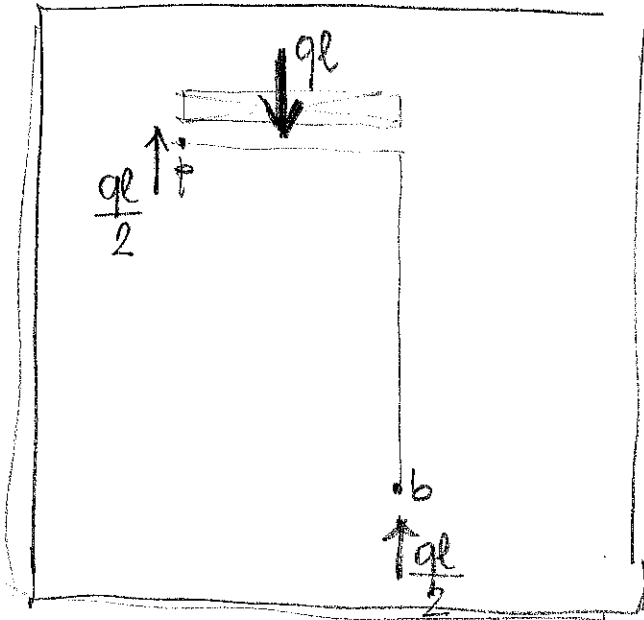
$$\equiv ql \dot{\theta}_{sx} \frac{3}{2}l + ql 2\dot{\theta}_{sx} \frac{l}{2} - R_0(b) 2\dot{\theta}_{sx} \left(\frac{l}{2} + h\right) = 0 \quad \forall \dot{\theta}_{sx}$$

$$\Rightarrow R_0(b) \underbrace{2\left(\frac{l}{2} + h\right)}_{\frac{3}{2}l} = ql \underbrace{\left(\frac{3}{2} + 1\right)l}_{\frac{5}{2}l} \Rightarrow \boxed{R_0(b) = \frac{5}{6} ql \frac{l}{h}}$$

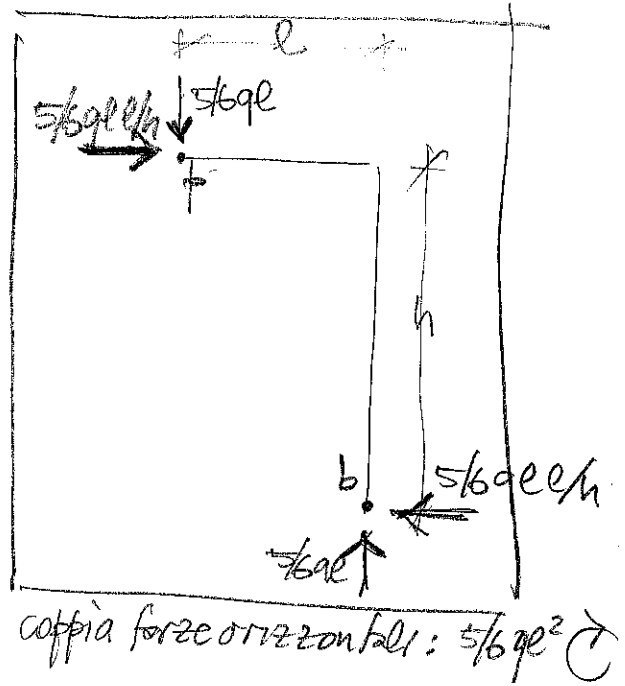
VERIFICA di EQUILIBRIO

(5 pts)

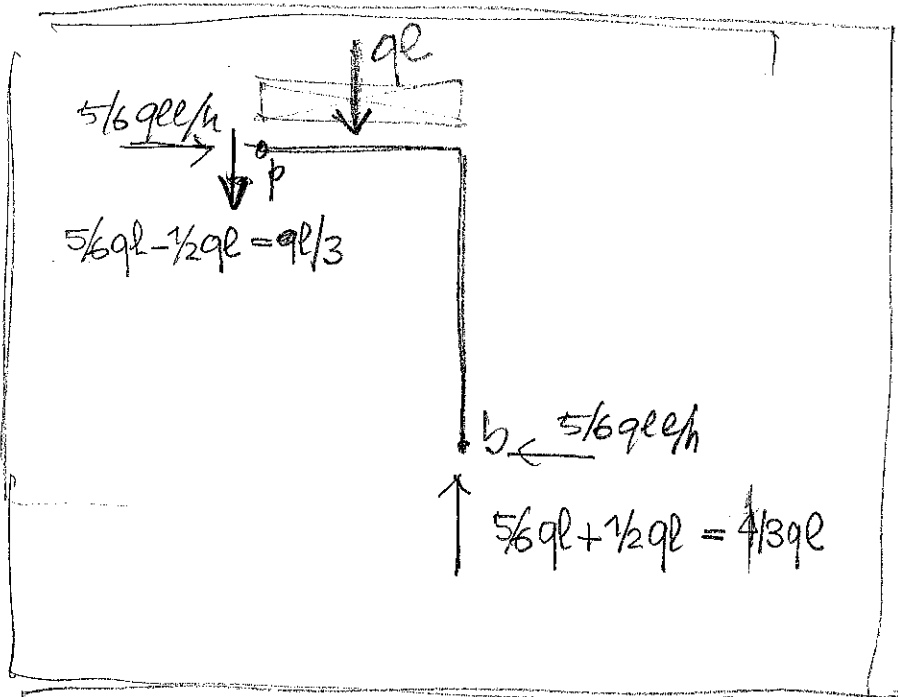
equilibrio locale a sx (non usato nei calcoli)



(+)



(=)

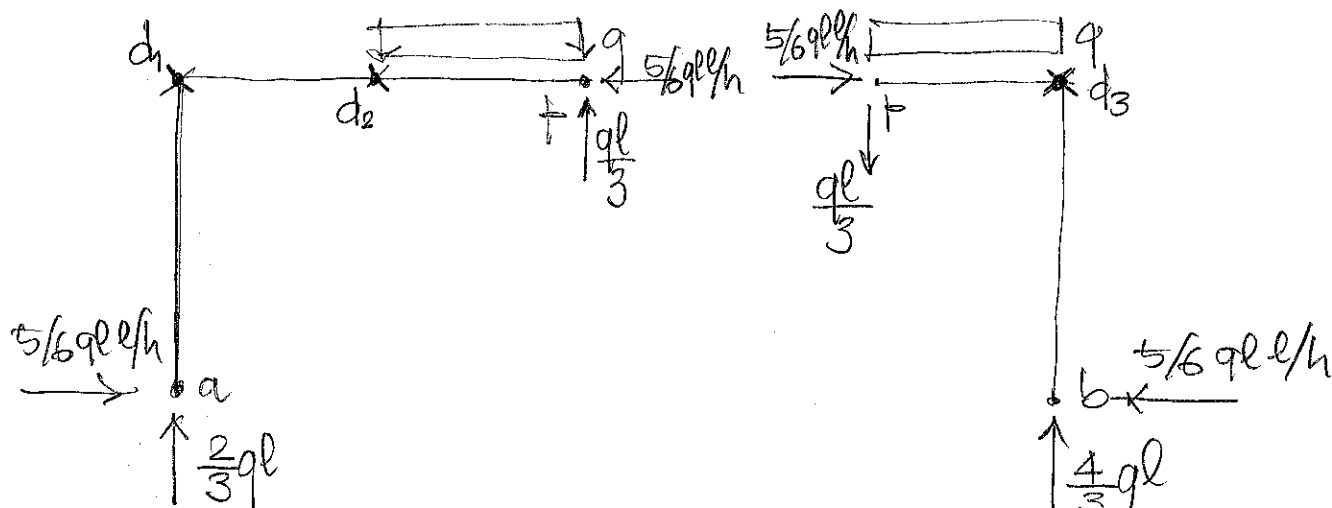


3. Tracciamento dei diagrammi della sollecitazione

(5)

3a. Identificazione dei tratti di trave in cui N, T, M sono funzioni continue

Guardando la figura del punto 1d



i tratti con funzioni continue sono 5

$$t_1: a - d_1$$

$$t_2: d_1 - d_2$$

$$t_3: d_2 - p$$

$$t_4: p - d_3$$

$$t_5: d_3 - b$$

N è costante su tutti i tratti

T è costante sui tratti in assenza di carico (t_1, t_2, t_5)

M è lineare

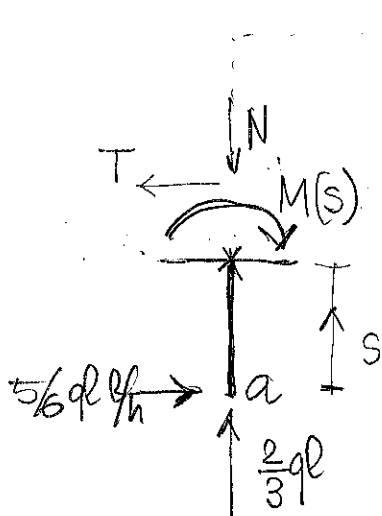
T è lineare sui tratti con carico costante q (t_3, t_4)

M è parabolico

3b calcolo di N, T, M per EQUILIBRI LOCALI

(6)

tratto t₁ (a - d₁)



s varia da 0 a h

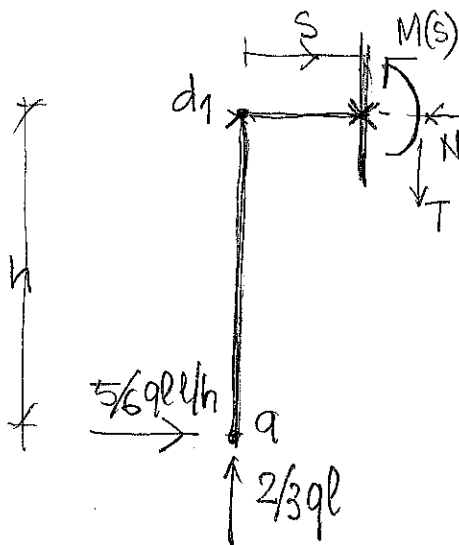
$$M(s) = \frac{5}{6} ql \frac{l}{h} s \quad (\text{tende la parte a sx dell'asse})$$

$$N = \frac{2}{3} ql \quad (\text{di compressione})$$

$$T = \frac{5}{6} ql \frac{l}{h} \quad (\text{antiorario})$$

tratto t₂ (d₁ - d₂)

s varia da 0 a l



$$M(s) = \frac{2}{3} ql s - \frac{5}{6} ql \frac{l}{h} s$$

(tende la parte in basso dell'asse)

$$N = \frac{5}{6} ql \frac{l}{h} \quad (\text{di compressione})$$

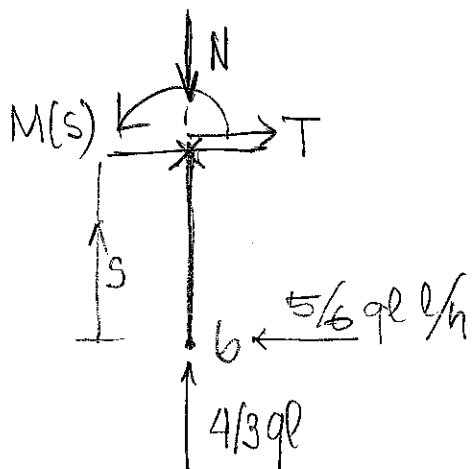
$$T = \frac{2}{3} ql \quad (\text{orario})$$

NP

$$M(0) = -\frac{5}{6} ql \frac{l}{h} \quad M(l) = -\frac{1}{6} ql^2$$

tratto t₃ (d₃ - b)

s varia da 0 a h



$$M(s) = \frac{5}{6} ql \frac{l}{h} s$$

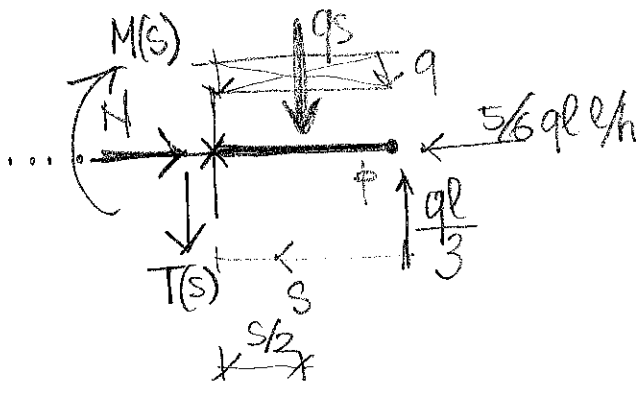
$$N = \frac{4}{3} ql \quad (\text{di compressione})$$

$$T = \frac{5}{6} ql \frac{l}{h} \quad (\text{orario})$$

tratto t_3 ($d_2 - p$)

$\begin{matrix} p \\ \downarrow \\ d_2 \end{matrix}$ $\begin{matrix} d_2 \\ \downarrow \\ s \end{matrix}$ (7)

s varia da 0 a l



$$M(s) = q\frac{l}{3}s - q\frac{s^2}{2}$$

(tende la parte in basso dell'asse)

$$T(s) = q\frac{l}{3} - qs$$

(antiorario)

$$N = \frac{5}{6} q l \frac{l}{h}$$

(compressione)

NB

$$M(0) = 0$$

$$M(l) = q\frac{l^2}{3} - q\frac{l^2}{2} = -q\frac{l^2}{6}$$

$$T(0) = q\frac{l}{3} \text{ (antiorario)}$$

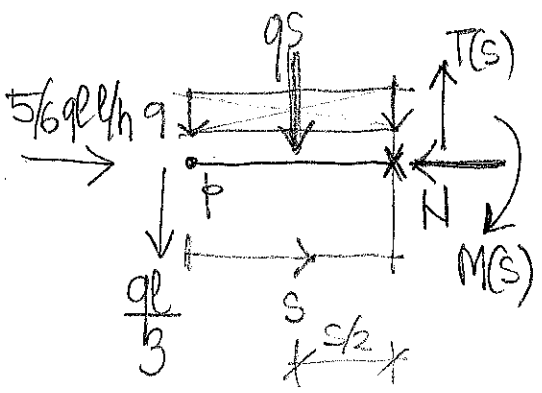
$$T(l) = q\frac{l}{3} - ql = -\frac{2}{3}ql \text{ (orario)}$$

$$T(s) = 0 \Rightarrow s = l/3 \Rightarrow M(l/3) = q\frac{l^2}{8}$$

tratto t_4 ($p - d_3$)

$\begin{matrix} p \\ \downarrow \\ d_3 \end{matrix}$

s varia da 0 a l



$$M(s) = q\frac{l}{3}s + q\frac{s^2}{2}$$

(tende la parte in alto dell'asse)

$$T(s) = q\frac{l}{3} + qs$$

(antiorario)

$$N = \frac{5}{6} q l \frac{l}{h} \text{ (compressione)}$$

NB

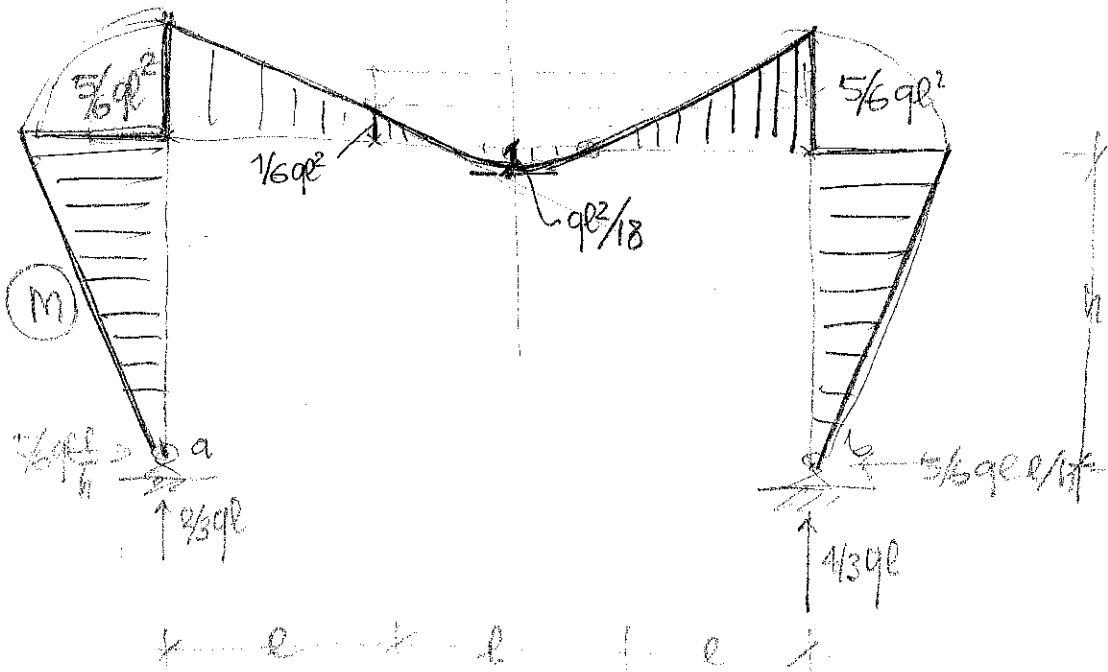
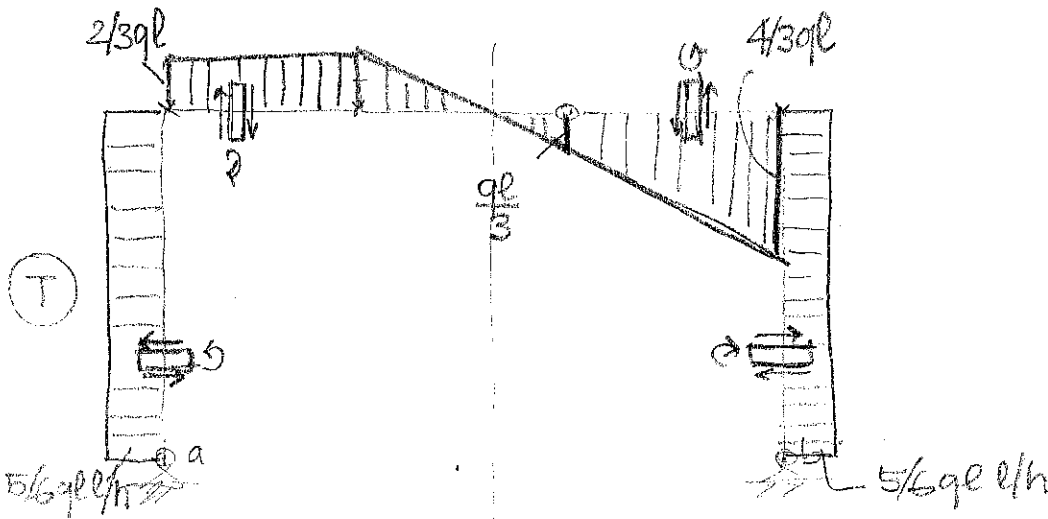
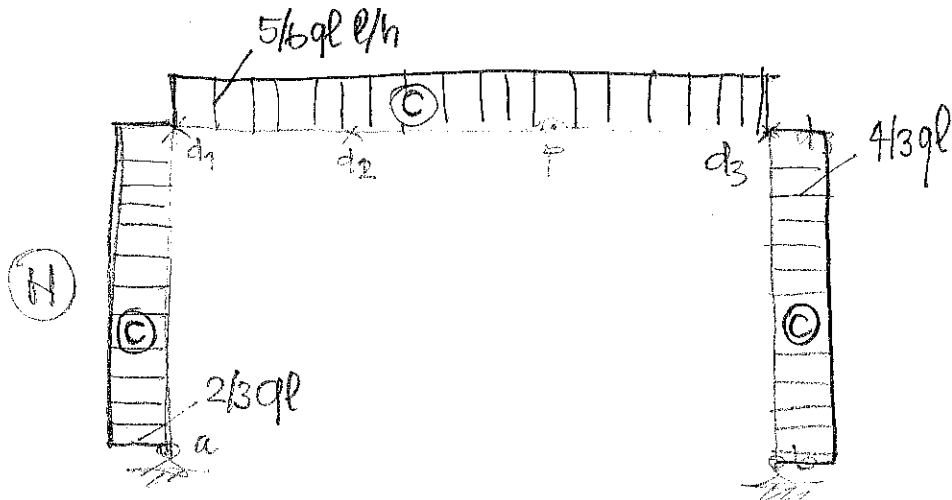
$$M(0) = 0 ; M(l) = q\frac{l^2}{3} + q\frac{l^2}{2} = \frac{5}{6} q l^2$$

$$T(0) = q\frac{l}{3} ; T(l) = q\frac{l}{3} + ql = \frac{4}{3} ql$$

$T(s) = 0 \Rightarrow$ mai per $s \in [0, l] \rightarrow$ nè min. nè max per $M(s)$

30. tracciamenti dei diagrammi

(8)

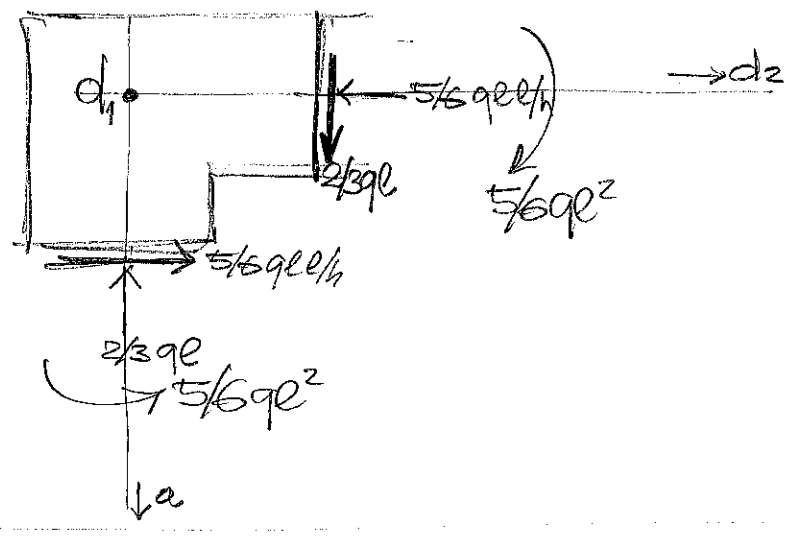


di EQUILIBRIO

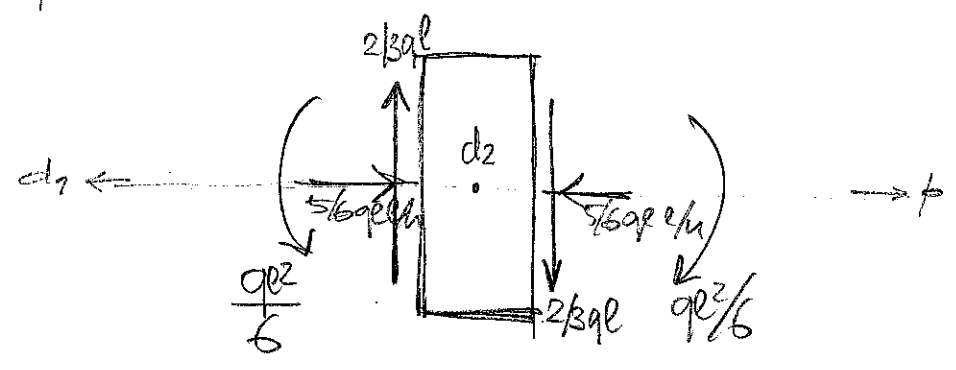
VERIFICHE sui punti di discontinuità

(9)

(infinitesimo nel)
punto d_1



(infinitesimo nel)
punto d_2



(infinitesimo nel)
punto d_3

