DEFINIZIONE DI FORZA

(O AZIONE DINAMICA)

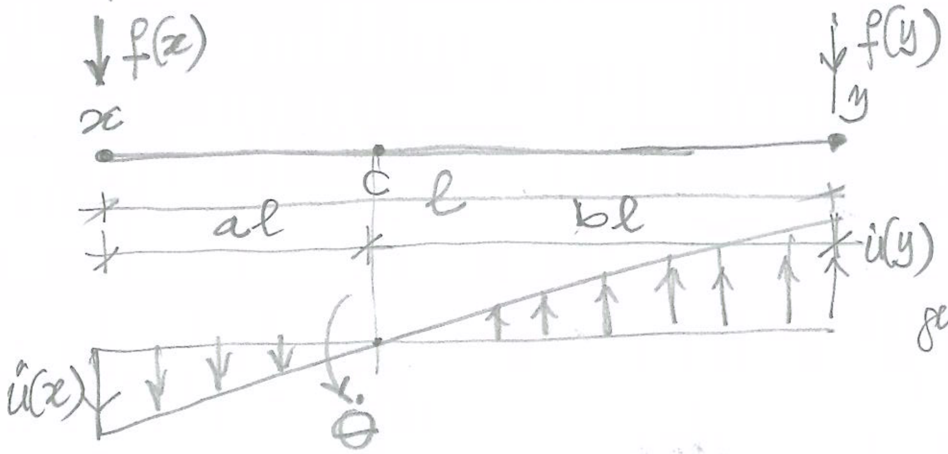
La forza $\underline{f}$ è quella grandezza fisica per la quale si può definire la potenza spesa P come

$$P = \underline{f} \cdot \underline{\dot{u}}$$

DEFINIZIONE DI EQUILIBRIO (DI CORPO RIGIDO) (EQL)

$$P = \sum_i \underline{f}(x_i) \cdot \underline{\dot{u}}(x_i) = 0 \qquad \forall \text{ AMR } \underline{\dot{u}}$$

esempio della leva



con $a, b < 1$
e $(a+b) = 1$

$$\dot{u}(x) = \dot{\theta} a l, \quad \dot{u}(y) = \dot{\theta} b l$$

$$P = f(x)\dot{u}(x) - f(y)\dot{u}(y) = 0 \qquad \forall \text{ AMR } \dot{u}$$

si ha quindi equilibrio quando

$$\left(f(x)al - f(y)bl\right)\dot{\theta} = 0 \qquad \forall \dot{\theta}$$

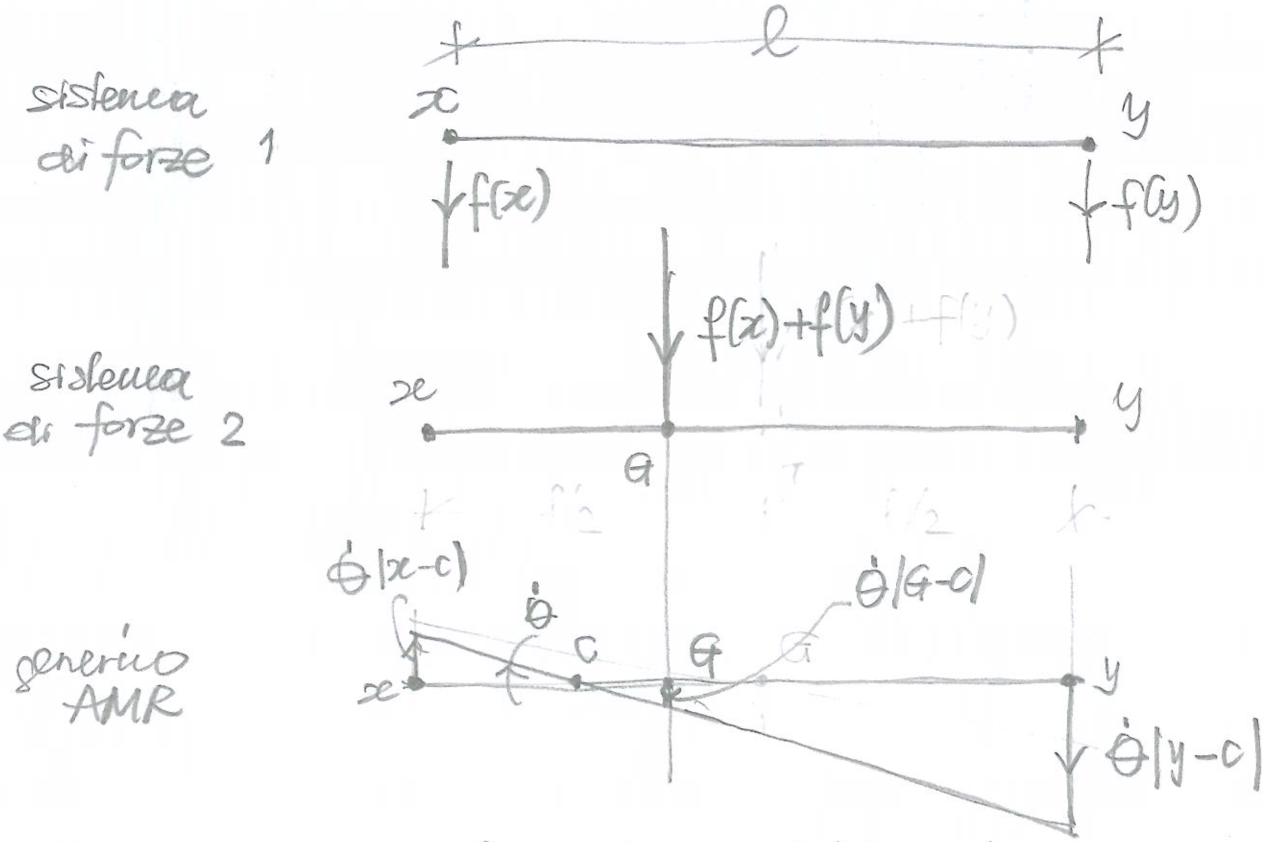
ovvero

$$f(x)a = f(y)b \rightarrow \frac{f(x)}{f(y)} = \frac{b}{a}$$

SISTEMI EQUIVALENTI DI FORZE

Due sistemi di forze sono equivalenti se per un qualsiasi AMR spendono la stessa potenza.

esempio



$$P_{sistema\,1} = -f(x)\dot\theta|x-c| + f(y)\dot\theta|y-c|$$

$$P_{sistema\,2} = \big(f(x)+f(y)\big)\dot\theta|G-c|$$

$$|x-c| = l-|y-c|$$
$$\downarrow$$
$$P_{sistema\,1} = -f(x)\,l\dot\theta + \big(f(x)+f(y)\big)\dot\theta|y-c|$$

$$|G-c| = |y-c|-|G-y|$$
$$\downarrow$$
$$P_{sistema\,2} = \big(f(x)+f(y)\big)\dot\theta|y-c| - \big(f(x)+f(y)\big)\dot\theta|G-y|$$

Basta quindi porre $f(x)+f(y)$ in un punto G tale che

$$|G-y| = \frac{f(x)\,l}{f(x)+f(y)} \quad \text{perché} \quad P_{sistema\,1} = P_{sistema\,2}$$

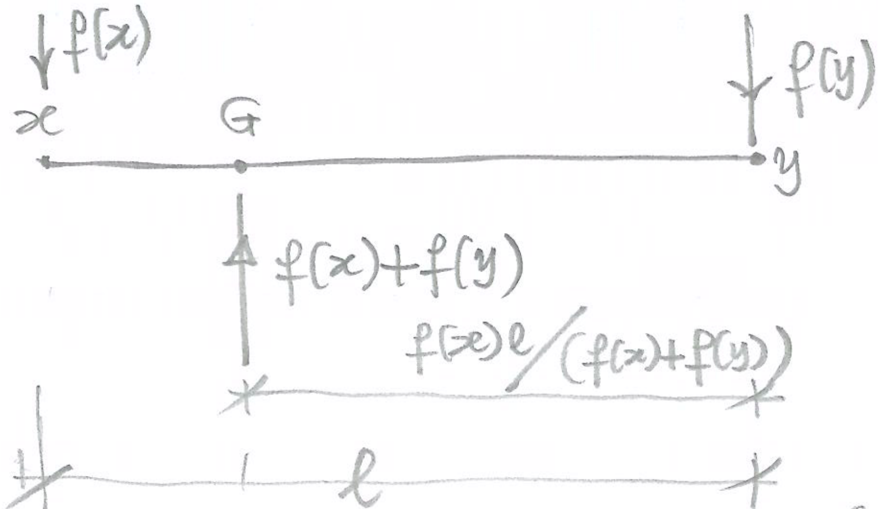
OSS.

* se $f(x) = f(y) = f$ (due forze uguali)

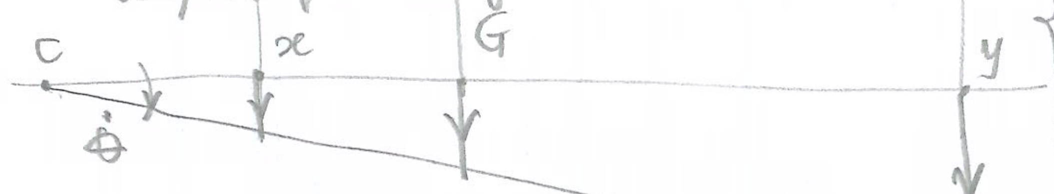
allora

$$|G-y| = \frac{f\,l}{2f} \equiv \frac{l}{2} \rightarrow$$ G si trova a metà di $(y-x)$

** il sistema con $f(x)+f(y)$ cambiato di segno aggiunto al sistema di una $f(x)$ e $f(y)$ separate è in equilibrio



Infatti per un generico AMR



$$\begin{cases} |x-c| = a \\ |G-c| = a + |G-c| \\ \quad = a + l - \dfrac{f(x)\,l}{f(x)+f(y)} \\ |y-c| = a+l \end{cases}$$

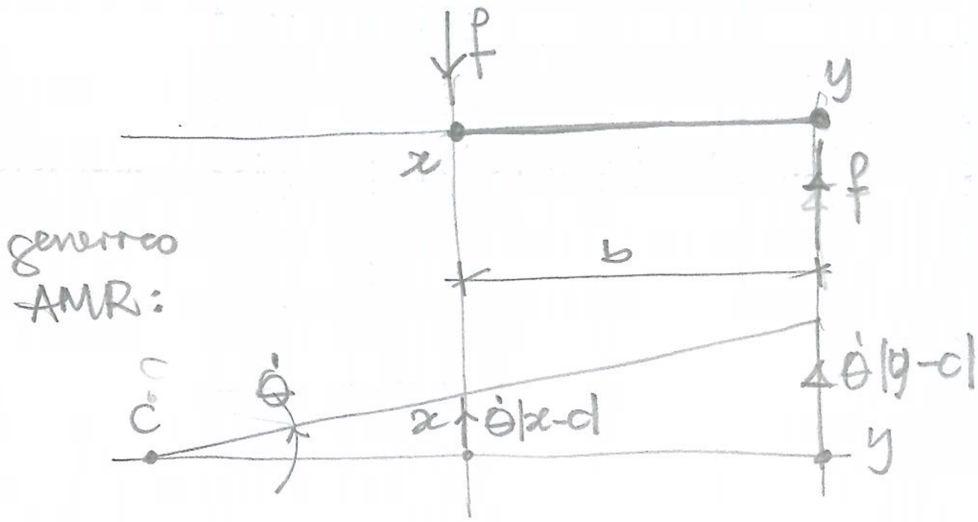
$$P = f(x)|x-c|\dot\theta - (f(x)+f(y))|G-c|\dot\theta + f(y)|y-c|\dot\theta$$

$$\equiv \dot\theta a\left(f(x)a - (f(x)+f(y))(a+l) + f(x)l + f(y)(a+l) \right)$$

$$\equiv 0 \quad \forall\, \theta$$

DEFINIZIONE DI COPPIA

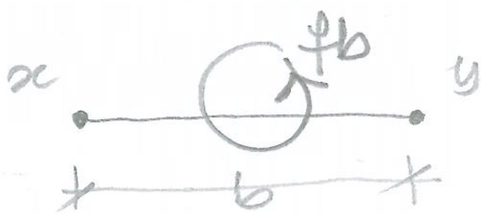
due forze uguali e contrarie poste a distanza b (detto "braccio" della coppia) spendono direttamente potenza per la velocità di rotazione $\dot{\theta}$



$$P = -f\dot{\theta}|x-c| + f\dot{\theta}|y-c|$$

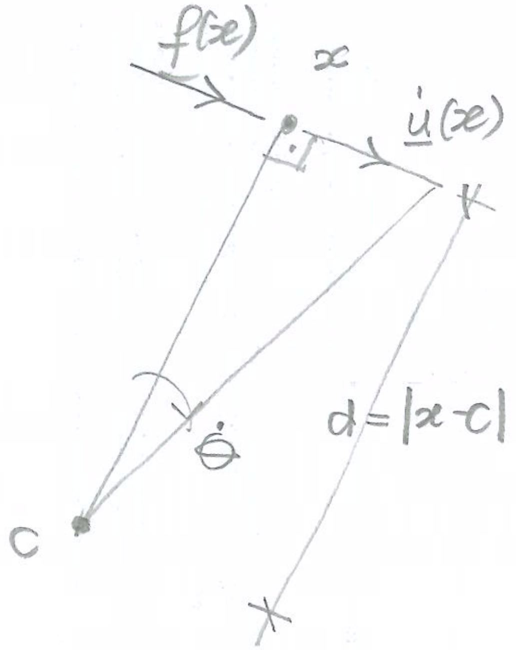
$$= f\underbrace{(|y-c| - |x-c|)}_{b}\dot{\theta} \equiv fb\dot{\theta}$$

fb è definito come "coppia" di forze ed è rappresentato graficamente come



fb è equivalente al sistema delle due forze (uguali e contrarie) a distanza b

MOMENTO DI UNA FORZA



La potenza esibita da una forza per una velocità $\dot{\underline{u}}(x)$ ottenuta come rotazione intorno a un c si può leggere come

$$P = \underline{f}(x)\cdot\dot{\underline{u}}(x) = \underbrace{f(x)d}\,\dot{\theta}$$

è detto momento esercitato da $f(x)$ per il braccio d

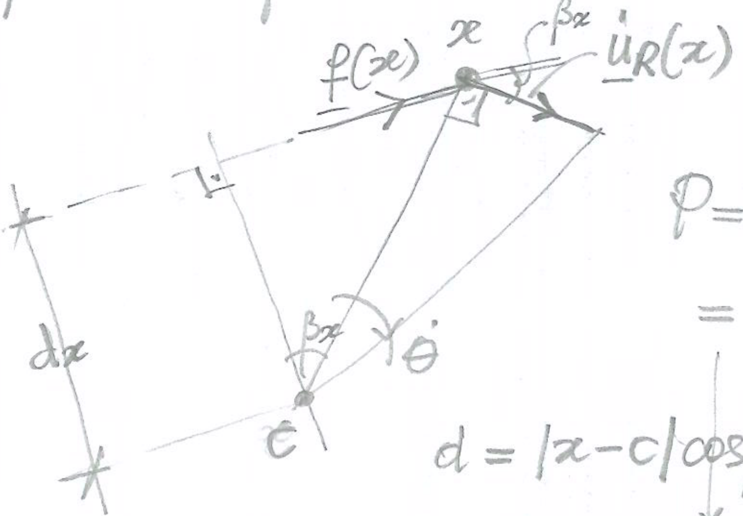
Poiché in generale un AMR è un ATTO TRASLATORIO + ATTO ROTATORIO

$$\dot{\underline{u}}(x) = \dot{\underline{u}}_T + \dot{\underline{u}}_R(x)$$

con $\dot{\underline{u}}_T$ uguale $\forall x$

e $\dot{\underline{u}}_R(x)$ tale che $|\dot{\underline{u}}_R(x)| = \dot{\theta}|x-c|$

una forza esibisce momento solo per una $\dot{\underline{u}}_R(x)$ in quanto la potenza risulta

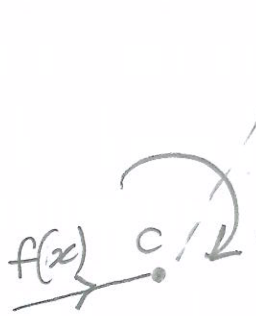


$$P = \underline{f}(x)\circ\dot{\underline{u}}_R(x)$$
$$= |\underline{f}(x)||\dot{\underline{u}}_R(x)|\cos\beta_x$$

$d = |x-c|\cos\beta$

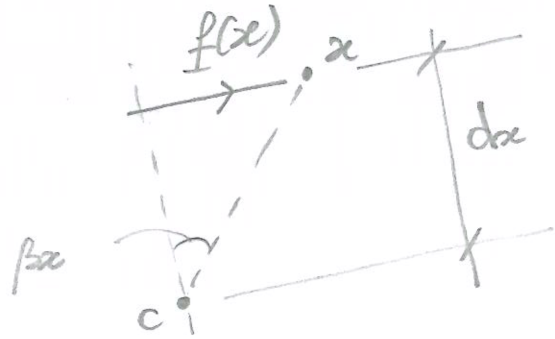
$$= |\underline{f}(x)||x-c|\cos\beta_x\,\dot{\theta}$$
$$= |\underline{f}(x)|\,d_x\,\dot{\theta}$$

Il momento esplicato da $f(x)$ rispetto a c può quindi essere rappresentato come



$$|f(x)|\, d_x = m_c(f(x))$$

intendendo questo equivalente al sistema



RISULTANTE E MOMENTO RISULTANTE DI UN SISTEMA DI FORZE

$$\mathcal{P} = \underline{f}(x) \cdot \underline{\dot{u}}(x) + \underline{f}(y) \cdot \underline{\dot{u}}(y) + \dots$$

$$\underline{\dot{u}}(x) = \underline{\dot{u}}_T + \underline{\dot{u}}_R(x)$$

$$\underline{\dot{u}}(y) = \underline{\dot{u}}_T + \underline{\dot{u}}_R(y)$$

$$\dots$$

con $|\underline{\dot{u}}_R(x)| = \dot{\theta}\,|x-c|$

$|\underline{\dot{u}}_R(y)| = \dot{\theta}\,|y-c|$

$\dots$

$$= \left(\underline{f}(x) + \underline{f}(y) + \dots\right) \cdot \underline{\dot{u}}_T +$$

$$+ \Big(\underbrace{|\underline{f}(x)|\,|x-c| \cos\beta_x}_{\substack{\text{momento esercitato da} \\ \underline{f}(x) \text{ rispetto a } c \\ m_c(\underline{f}(x))}} + |\underline{f}(y)|\,|y-c| \cos\beta_y + \dots\Big)\dot{\theta}$$

---- analogamente

"Risultante delle forze": $\underline{f}(x) + \underline{f}(y) + \dots$

cioè la forza complessiva del sistema di forze che spende potenza per un puro atto traslatorio

"momento risultante delle forze": $|\underline{f}(x)|\underbrace{|x-c|\cos\beta_x}_{d_x} + |\underline{f}(y)|\underbrace{|y-c|\cos\beta_y}_{d_y} + \dots$

cioè il momento complessivo delle forze che spende potenza per un puro atto rotatorio

$\Rightarrow$ Due sistemi di forze sono EQUIVALENTI anche se hanno stessa RISULTANTE e MOMENTO RISULTANTE di FORZE (rispetto a un punto c)

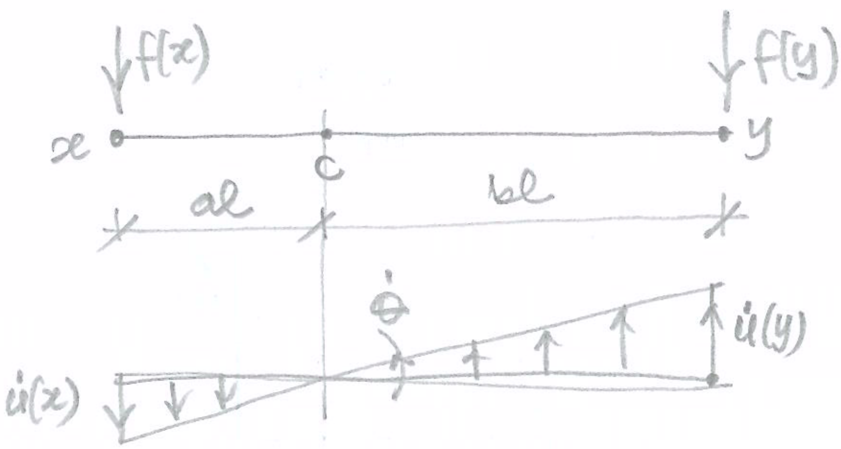
EQUILIBRIO (enunciato equivalente a $\mathcal{P}_0 = 0 \ \forall AMR$)

un sistema di forze è quindi in equilibrio se

$$\begin{cases} \text{Risultante forze} = 0 \\ \text{mom. risultante} = 0 \\ \text{(per un punto } c\text{)} \end{cases}$$

OSS.

esempio :



$$0 = \mathcal{P} = f(x)\,\dot{u}(x) - f(y)\,\dot{u}(y)$$

$$= f(x)\dot{\theta}al - f(y)\dot{\theta}bl$$

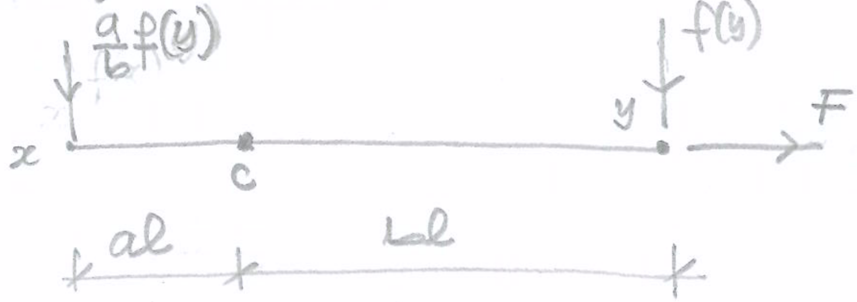
$$= \underbrace{\left(f(x)al - f(y)bl\right)}_{\text{momento risultante intorno a } c}\dot{\theta}$$

$f(x)al$ $f(y)bl$

* Se per l'EQL si chiede quindi che $f(x) = f(y)\frac{b}{a}$, sembra, apparentemente, che la risultante delle forze non sia nulla : $f(x) + f(y) \equiv (1 + \frac{b}{a})f(y) \neq 0$

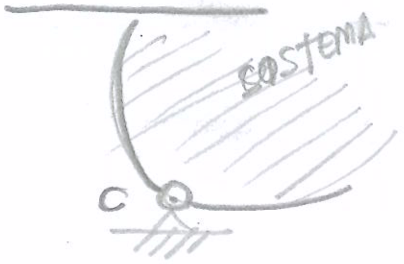
* Se però, si considera che in c si ha $\dot{u}(c) = 0$ ciò costituisce un vincolo all'AMR, e quindi gioca un ruolo nell'equilibrio del sistema.

* Stessa cosa accade se si inserisce un'altra forza F orizzontale, il sistema



risulta comunque in equilibrio se si prende opportunamente in considerazione il ruolo giocato dal vincolo in C.

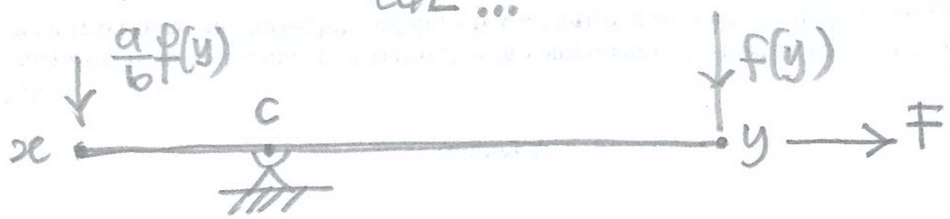
VINCOLI



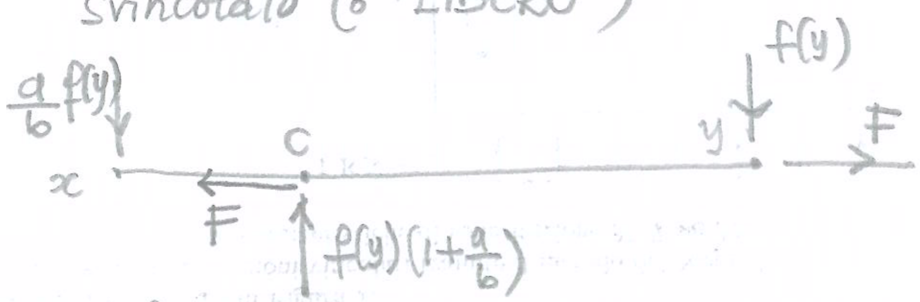
"CERNIERA": vincolo tale che nel suo centro C
$\underline{\dot{u}}(C)=0$

la cerniera, cioè, identifica un centro d'istantanea rotazione

nell'esempio: lo schema disegnato è una configurazione di EQL ...



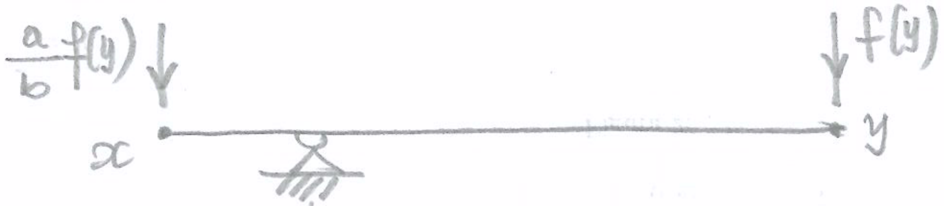
... ma disponendo adeguatamente le forze su un sistema svincolato (o "LIBERO")



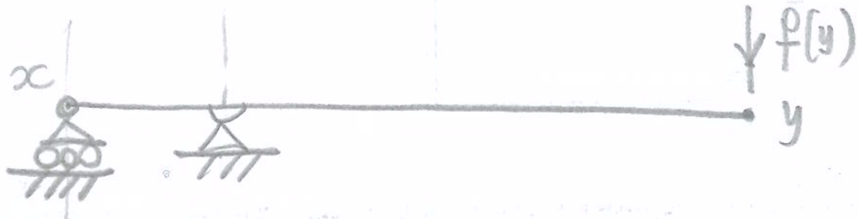
anche questo sistema è in EQL.
Questo significa che la cerniera in C svolge all'EQL il ruolo di due forze (una orizzontale, una verticale) di valori F e $f(y)(1+a/b)$

"CARRELLO": vincolo tale che la traslazione lungo il proprio asse è nulla

un esempio,



schema in equilibrio come



cioè il carrello con asse verticale in x esibisce (gioca all'EQL il ruolo di) una forza $\frac{a}{b}f(y)$ verso il basso (trattiene verso il basso la struttura con la forza $\frac{a}{b}f(y)$)