$\forall\, x, y$ e per ogni istante di tempo

$$\underbrace{(x-y)\circ(x-y)}_{(\circ)} = \text{cost.} \leftarrow \boxed{\text{MOTO RIGIDO}} \text{ (MR)}$$

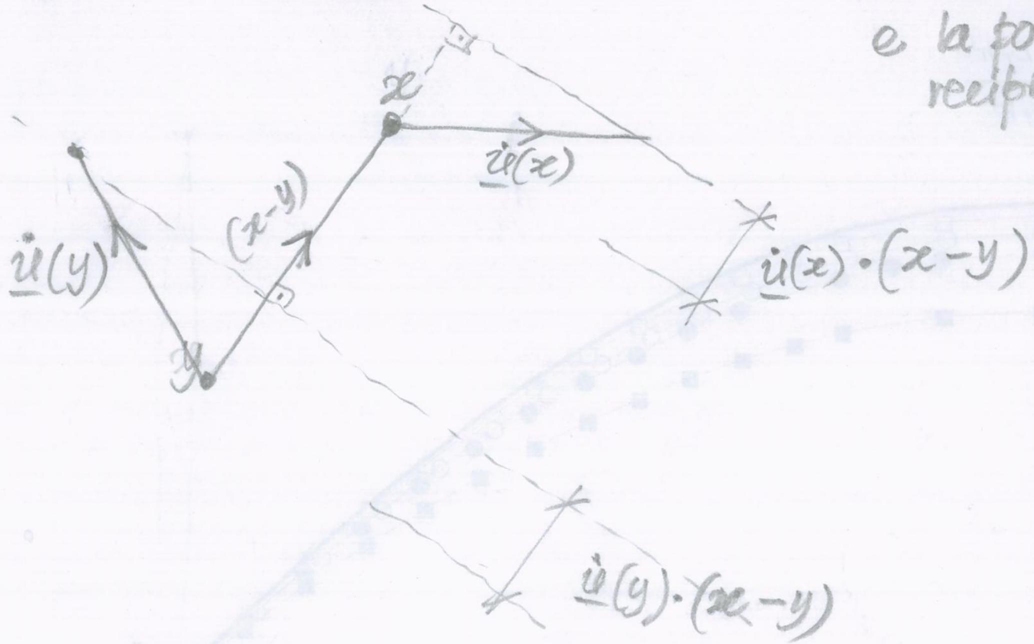
$\Downarrow$

ATTO DI MOTO RIGIDO (AMR)

(∘): misura (al quadrato) della distanza tra due punti

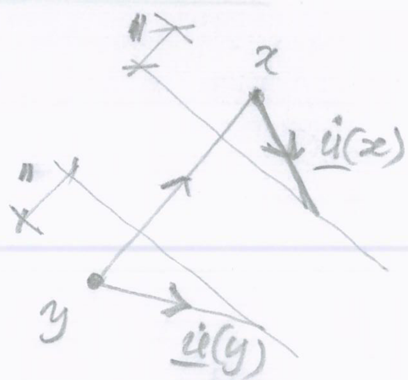
$$\frac{d(\circ)}{dt} = 0$$

$$\left(\underline{\dot{u}}(x) - \underline{\dot{u}}(y)\right)\circ(x-y) = 0 \rightarrow$$ equiPROIETTIVITÀ TRA le velocità dei punti e la posizione reciproca dei punti



NB la proiezione (prodotto scalare tra i vettori) conserva il segno

cioè,



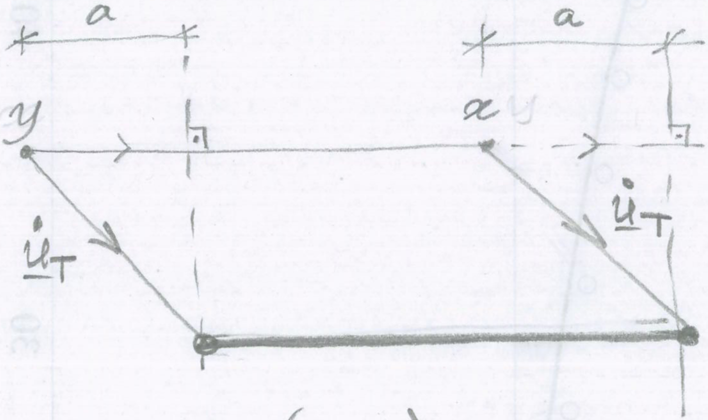
NON E' UN AMR!

pur avendo proiezioni in valore assoluto uguali

OSS 1

l'equiproiettività viene verificata se le due velocità sono uguali $\underline{\dot{u}}(y) = \underline{\dot{u}}(x) =: \dot{u}_T$

$\dot{u}_T$ è una velocità di TRASLAZIONE di tutto il sistema

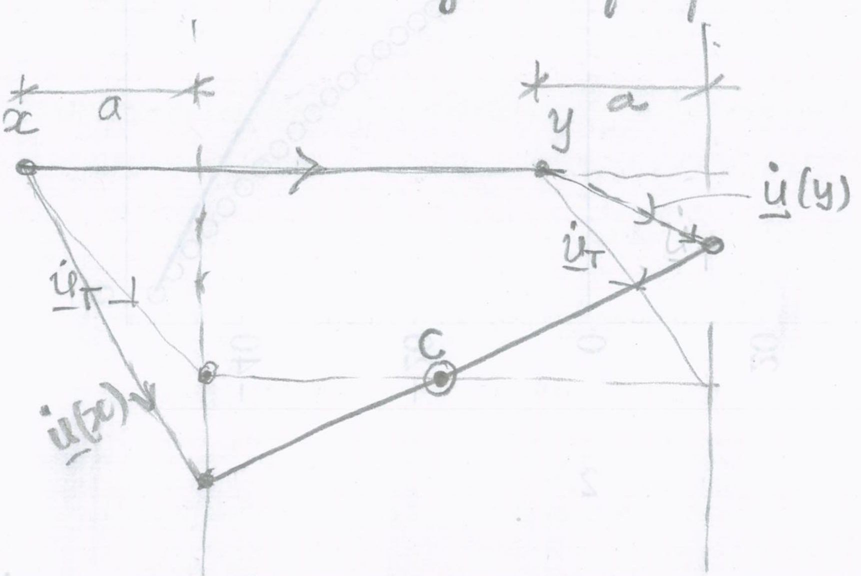


a è pari a $\underline{\dot{u}}_T \cdot (x-y)$ a meno della lunghezza $|x-y|$

cioè: $a = \frac{1}{|x-y|} \underline{\dot{u}}_T \cdot (x-y)$

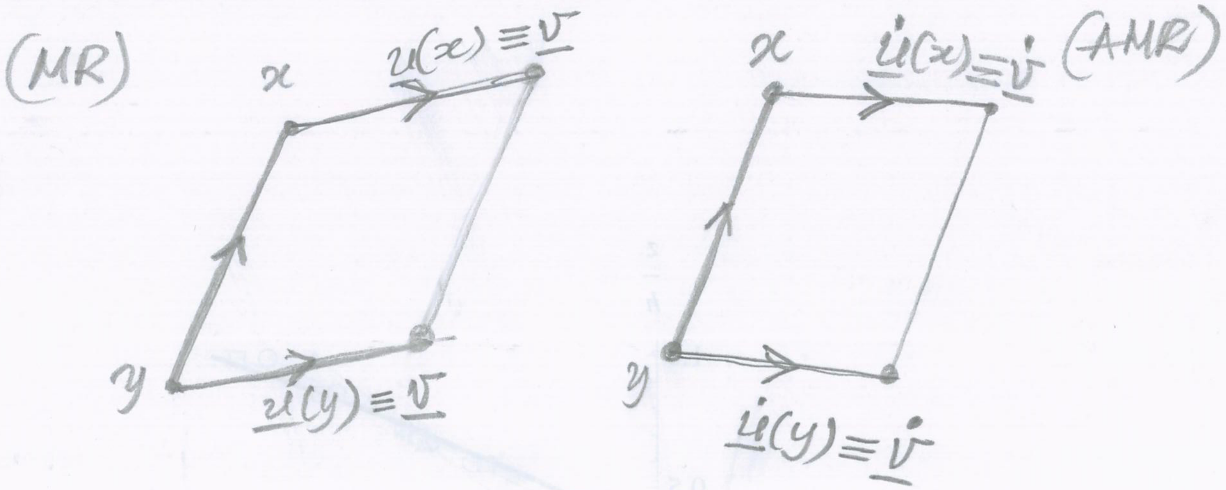
OSS 2

tutto ciò che è diverso dalla traslazione è un atto in cui sulla retta $(x-y)$ traslata di $\dot{u}_T$ si trova un punto a velocità nulla.
Questo è vero in ragione proprio dell'equiproiettività.

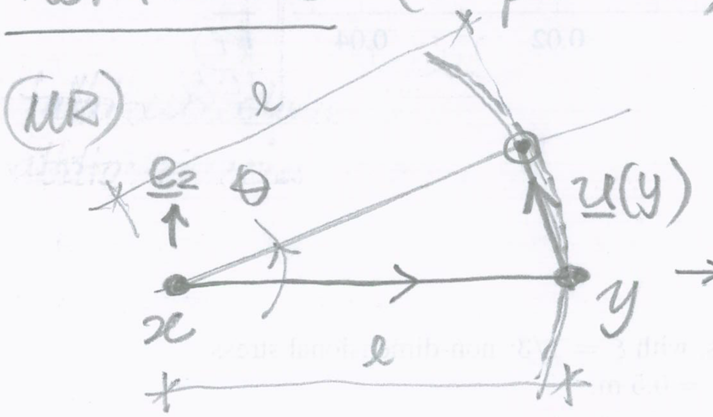


Sia c questo punto sull'asse $(x-y)$ traslato di $\underline{\dot{u}}_T$; per definizione il punto c a velocità nulla è un CENTRO D'ISTANTANEA ROTAZIONE un moto rigido (così come un atto) può essere visto come una TRASLAZIONE più una ROTAZIONE

TRASLAZIONE ($\underline{v}$ per MR; $\dot{\underline{v}}$ per AMR)



ROTAZIONE (θ per MR; $\dot{\theta}$ per AMR)



MR in rotazione descrive, con i punti considerati, degli archi di cerchio

$$l := |x - y| \equiv \sqrt{(x-y)\cdot(x-y)}$$

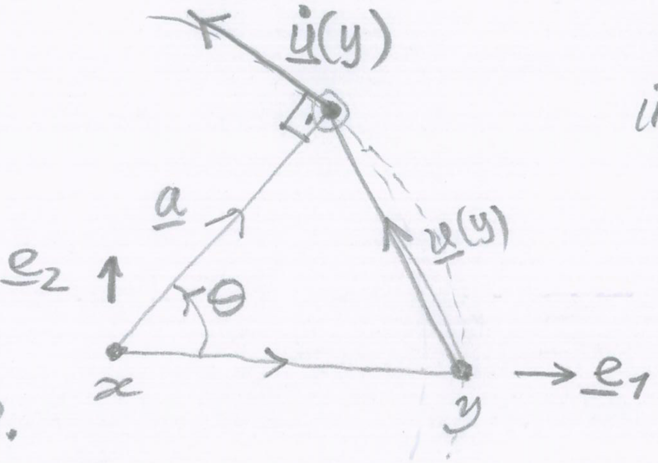
$$\underline{u}(y) = -l(1-\cos\theta)\,\underline{e}_1 + l\sin\theta\,\underline{e}_2$$

(AMR)

$$\dot{\underline{u}}(y) = -l\sin\theta\,\dot{\theta}\,\underline{e}_1 + l\cos\theta\,\dot{\theta}\,\underline{e}_2$$

OSS 1.

* $\dot{\underline{u}}(y)$ è ortogonale alla nuova posizione di y, cioè al vettore $\underline{a} = (y-x) + \underline{u}(y)$



infatti,

$$\underline{a} = l\cos\theta\, \underline{e}_1 + l\sin\theta\, \underline{e}_2$$

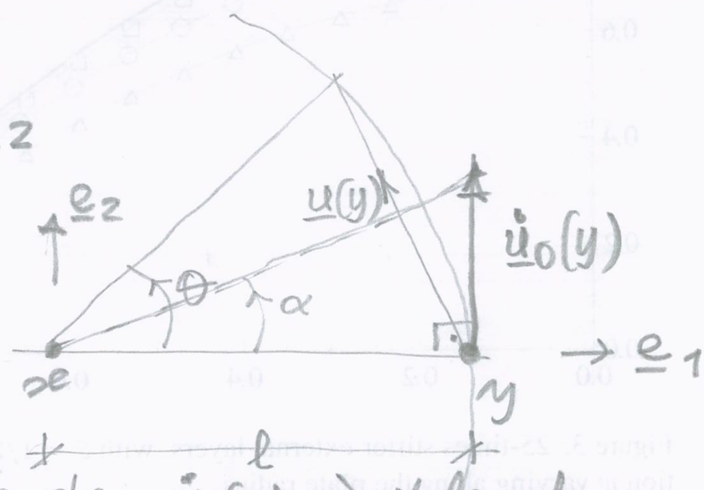
e

$$\underline{a} \cdot \dot{\underline{u}}(y) = 0$$

OSS 2.

* la velocità all'istante iniziale $t=0$ risulta imponendo $\theta_0 = 0,\ \dot{\theta}_0 \neq 0$ cioè

$$\dot{\underline{u}}_0(y) \equiv l\dot{\theta}_0\, \underline{e}_2$$



* l'angolo α aperto da $\dot{\underline{u}}_0(y)$ è tale che

$$\tan\alpha = \dot{\theta}_0$$

per costruzione, essendo $|\dot{\underline{u}}(y)| = l\dot{\theta}_0$

OSS 3.

l' AMR è un'approssimazione (di linearizzazione) del MR.

Infatti, se sviluppiamo in serie di Taylor $\underline{u}(y)$ intorno al valore θ_0 abbiamo un valore approssimato dello spostamento $\underline{\tilde{u}}(y)$ pari a

$$\underline{\tilde{u}}(y) \cong l\left(-1+\cos\theta_0 - \sin\theta_0(\theta-\theta_0) - \frac{1}{2}\cos\theta_0(\theta-\theta_0)^2 + \frac{1}{6}\sin\theta_0(\theta-\theta_0)^3 + \cdots\right)\underline{e}_1 + l\left(\sin\theta_0 + \cos\theta_0(\theta-\theta_0) - \frac{1}{2}\sin\theta_0(\theta-\theta_0)^2 + \frac{1}{6}\cos\theta_0(\theta-\theta_0)^3 + \cdots\right)\underline{e}_2$$

e supponiamo che $\theta_0 = 0$ e θ a partire da questo valore sia una piccola variazione $\delta\theta$, abbiamo

$$\underline{\tilde{u}}(y) \cong l\left(-\frac{1}{2}\delta\theta^2 + \cdots\right)\underline{e}_1 + l\left(\delta\theta + \frac{1}{6}\delta\theta^3 + \cdots\right)\underline{e}_2$$

Quindi se $\delta\theta$ è "piccolo", cioè $\delta\theta \ll \delta\theta^2 \ll \delta\theta^3 \ll \cdots$

$$\underline{\tilde{u}}(y) = l\,\delta\theta\,\underline{e}_2$$

che, confrontato con la velocità in $t=0$, $\underline{\dot{u}}_0(y) = l\dot{\theta}_0\underline{e}_2$, attesta che, a meno di un fattore-tempo δt (in cui θ passa da 0 a $\delta\theta$)

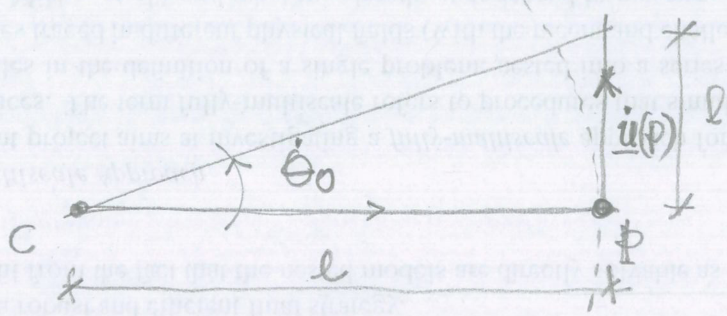
$\delta\theta = \dot{\theta}_0\delta t$ implica che $\boxed{\underline{\tilde{u}}(y) \cong \underline{\dot{u}}_0(y)\delta t}$

Inoltre, l'angolo α sottostante a $\underline{\dot{u}}_0$ risulta tale che

$$\alpha = \mathrm{atan}(\dot{\theta}_0) \cong \mathrm{atan}(\delta\theta/\delta t) \cong \delta\theta/\delta t = \dot{\theta}_0$$

poiché $\delta\theta$ è piccolo

In definitiva, l'AMR può essere rappresentato come rappresentato in figura (per la sola parte di rotazione)



→ C prende il nome di CENTRO D'ISTANTANEA ROTAZIONE (CIR)

→ la velocità di P è sempre ortogonale alla direzione $C-P$

$$\underline{u}(P)\cdot(P-C)=0$$

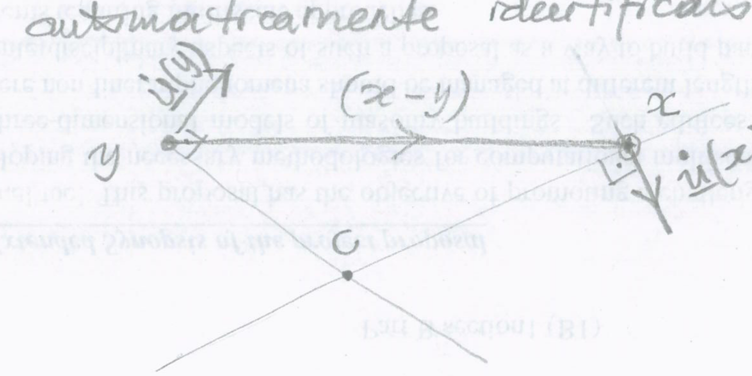
→ per validità dell'equiproiettività il CIR è per definizione quel punto C a velocità nulla

infatti, EQUIPROIETTIVITÀ

$$\underbrace{\underline{u}(P)\cdot(P-C)}_{=0\ \text{(per costruzione)}} \stackrel{!}{=} \underline{u}(C)\cdot(P-C)$$

$$\boxed{\underline{u}(C)=0}$$

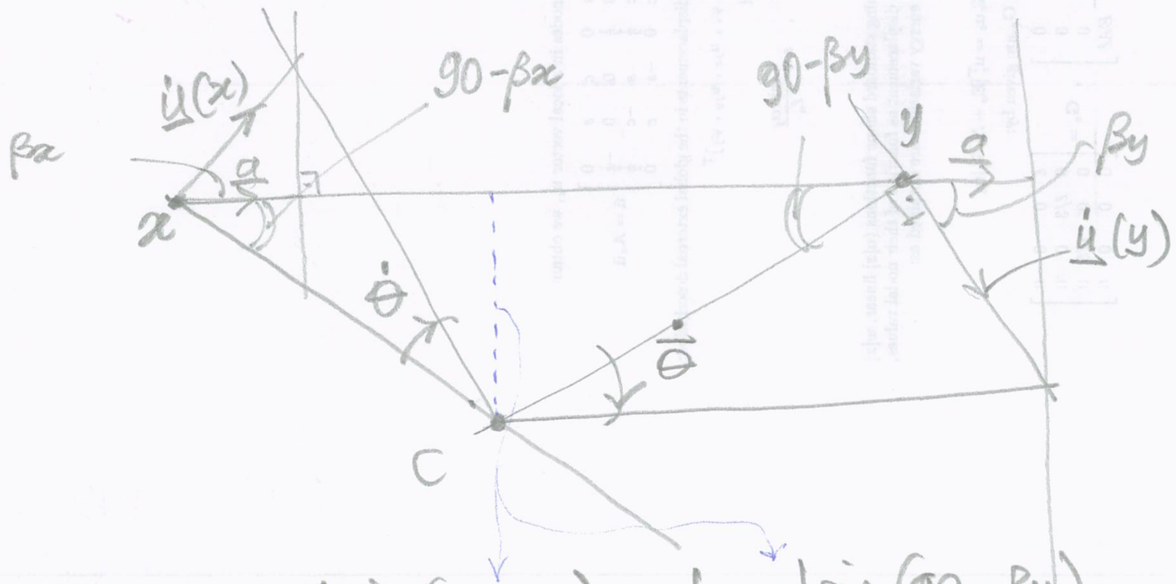
→ se esiste un CIR date le velocità di due punti (x, y) NEL PIANO C è automaticamente identificato



OSS 4

Se esiste un CIR, allora $\dot{\theta}$ è unica.

* Infatti, si ottiene per costruzione, (ponendo un c sulla direzione ortogonale a un assegnato $\underline{\dot{u}}(x)$ e imponendo l'equiproiettività)



$$|x-c|\sin(90-\beta x) = |y-c|\sin(90-\beta y)$$

ovvero

(1) $$|x-c|\cos\beta x = |y-c|\cos\beta y$$

equiproiettività

(2) $$|\underline{\dot{u}}(x)|\cancel{|x-y|}\cos\beta x = |\underline{\dot{u}}(y)|\cancel{|x-y|}\cos\beta y$$

AMR di rotazione

(3) $$\begin{cases} |\underline{\dot{u}}(x)| = |x-c|\dot{\theta} \\ |\underline{\dot{u}}(y)| = |y-c|\dot{\bar{\theta}} \end{cases}$$ posto per assurdo $\dot{\bar{\theta}} \neq \dot{\theta}$

la (3) nella (2) fornisce

$$|x-c|\dot{\theta}\cos\beta x = |y-c|\dot{\bar{\theta}}\cos\beta y$$

ma per la (1) $\Longrightarrow \dot{\bar{\theta}} \equiv \dot{\theta}$

GRADI DI LIBERTA' (o DOF)

"DEGREE OF FREEDOM"

nel PIANO,
si può ricostruire l'AMR di tutto il corpo a partire da poche quantità note:

nota la velocità di un punto x e la posizione di C

(ovvero) nota ______________ e la velocità di $\dot{\theta}$

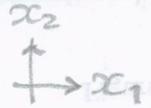
(o più in generale)

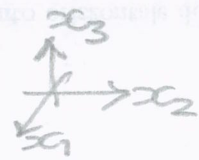
nota la velocità di traslazione e la velocità di rotazione

Queste informazioni minime costituiscono i modi-base con cui ricavare l'intero AMR.

Ovverò, si parametrizza l'AMR di tutto il corpo in funzione di un numero NEC e SUFF. di parametri

Questi parametri sono detti DOF.





	PIANO (x_1, x_2)	SPAZIO (x_1, x_2, x_3)
velocità di TRASLAZIONE	2 parametri (traslazione lungo x_1, ______ x_2)	3 parametri (traslazione lungo x_1, ______ x_2 ______ x_3)
velocità di ROTAZIONE	1 parametro (rotazione intorno a C, asse fuori piano)	3 parametri (rotazione intorno ai tre assi)
DOF	3	6